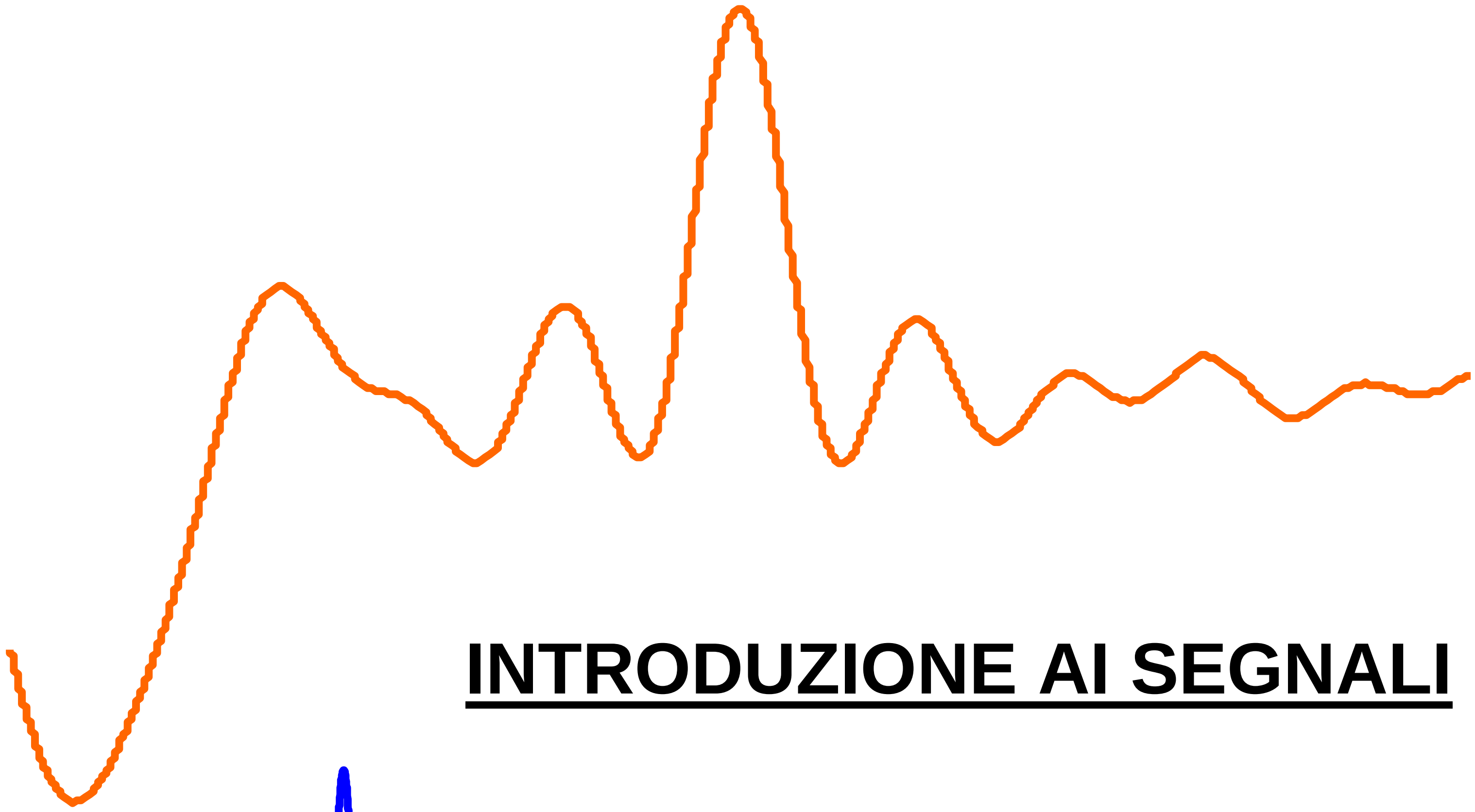
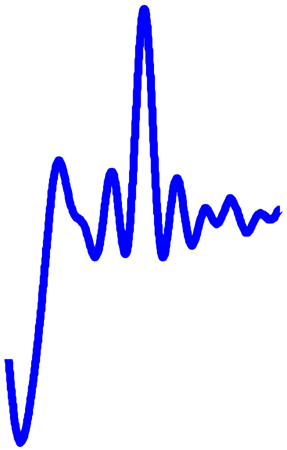


INTRODUZIONE AI SEGNALI



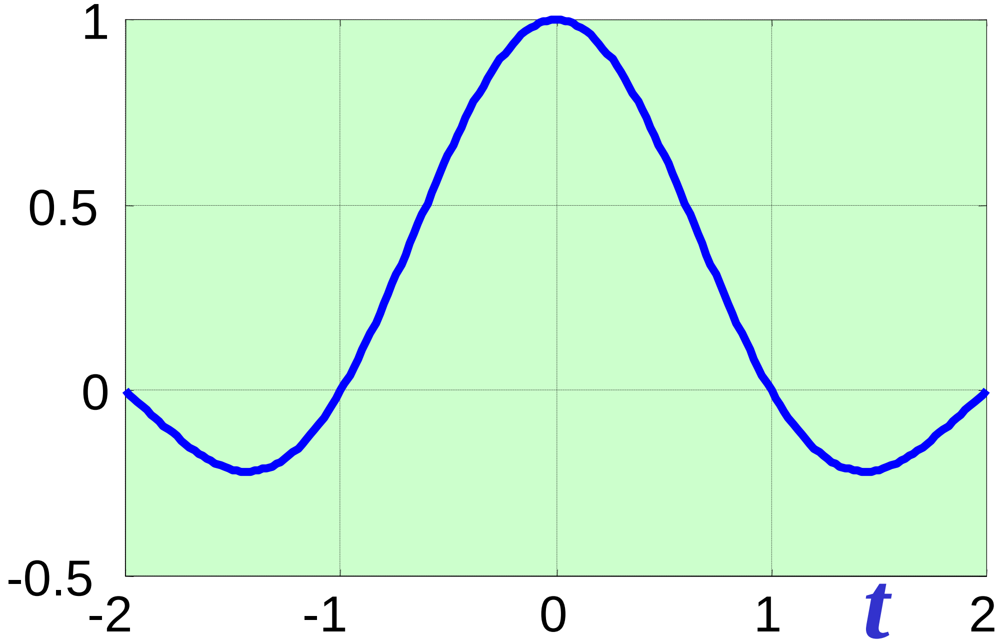
Classificazione dei segnali (1)

I segnali rappresentano il comportamento di grandezze fisiche (ad es. tensioni, temperature, pressioni, ...) in funzione di una o piu' variabili indipendenti (ad es. il tempo *t,* lo spazio *x, ...*).

I segnali *monodimensionali* sono rappresentati da funzioni di una sola variabile e possono essere:

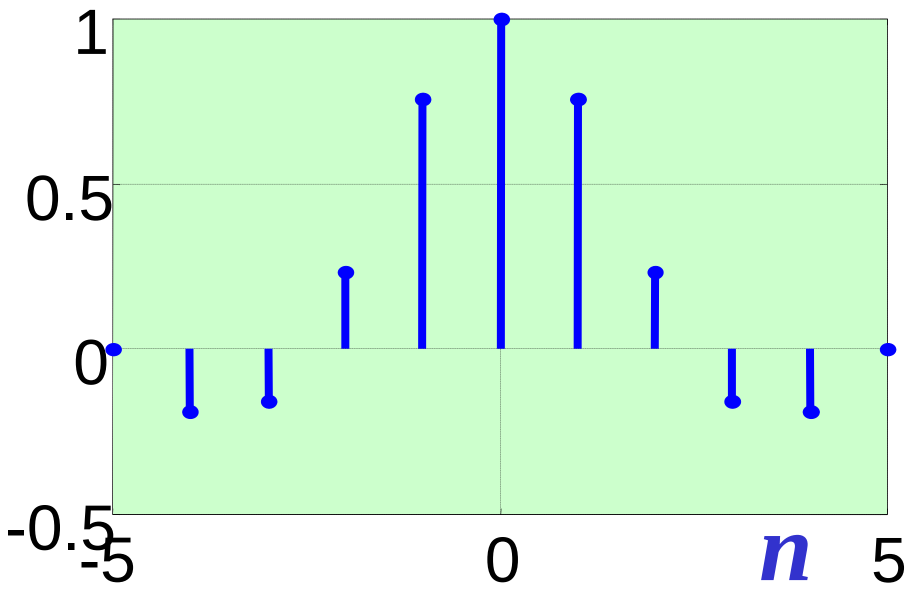
- continui => se la variabile indipendente assume con continuita' tutti i valori reali

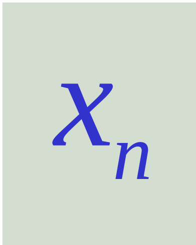
$x(t)$



Classificazione dei segnali (2)

• discreti => se la variabile indipendente assume valori multipli interi di un intervallo prefissato





• reali => se il segnale assume solo valori reali

• complessi => se il segnale assume valori complessi (parte reale + parte immaginaria oppure modulo + fase)

Classificazione dei segnali (3)

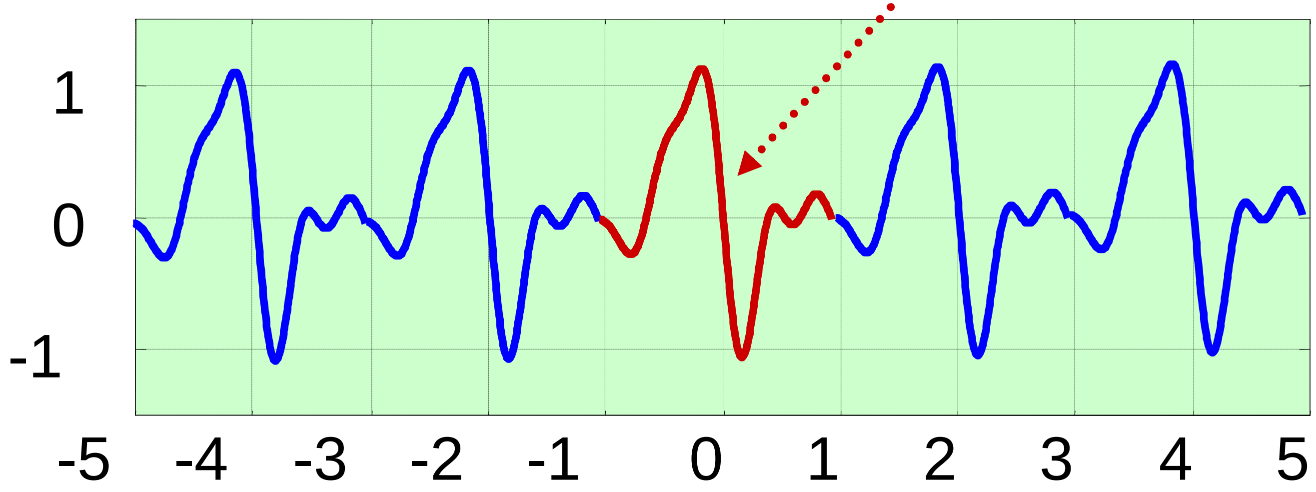
• periodici => se il segnale si ripete uguale a se stesso dopo un qualsiasi intervallo multiplo di un periodo di durata T_o . L'inverso della durata del periodo viene detto *frequenza fondamentale* f_o del segnale periodico.

Se ***x(t)*** e' periodico, con periodo T_o , e se con ***g(t)*** si indica ***x(t)*** troncato ad un solo periodo, e' evidente che il segnale periodico puo' essere espresso come:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT_o)$$

g(t)

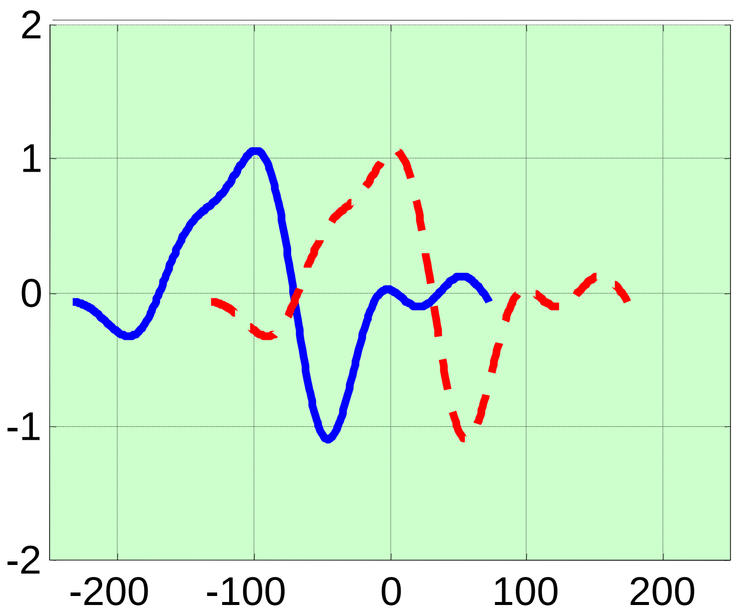
T_o



Ritardo

Il segnale $x(t-\tau)$ e' ritardato di τ rispetto a $x(t)$;

e' traslato rigidamente verso destra



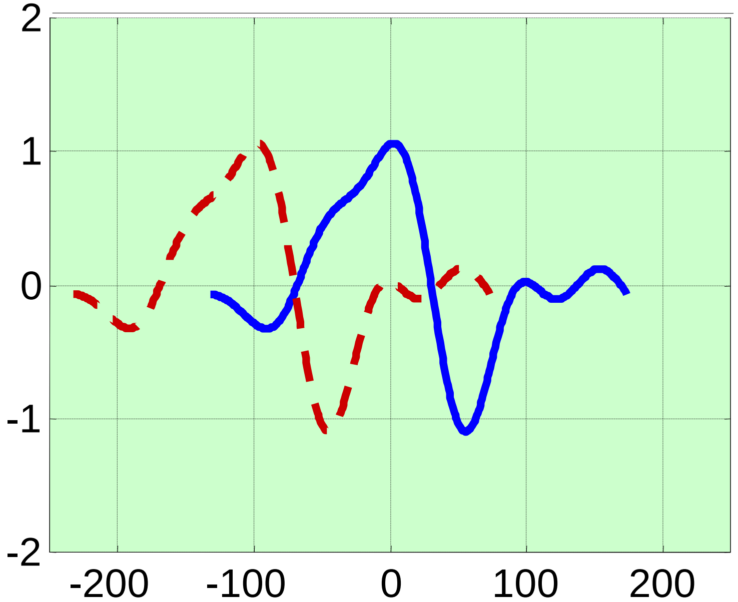
$x(t)$

$x(t-100)$

Anticipo

Il segnale $x(t+\tau)$ e' anticipato di τ rispetto a $x(t)$;

e' traslato rigidamente verso sinistra



$x(t)$

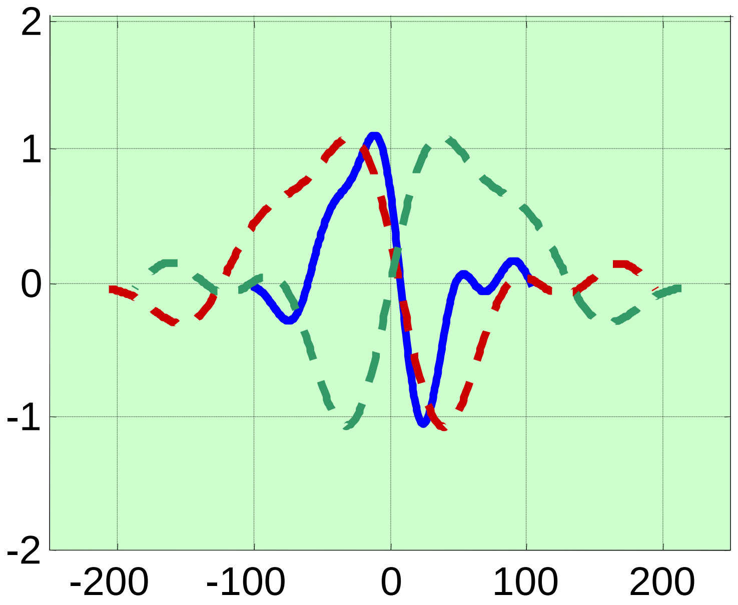
$x(t+100)$

Scalatura

Il segnale $x(at)$ e' scalato di a rispetto a $x(t)$;

e' dilatato se $|a|<1$ e compresso se $|a|>1$

e' anche ribaltato rispetto all'asse delle ordinate se $a<0$



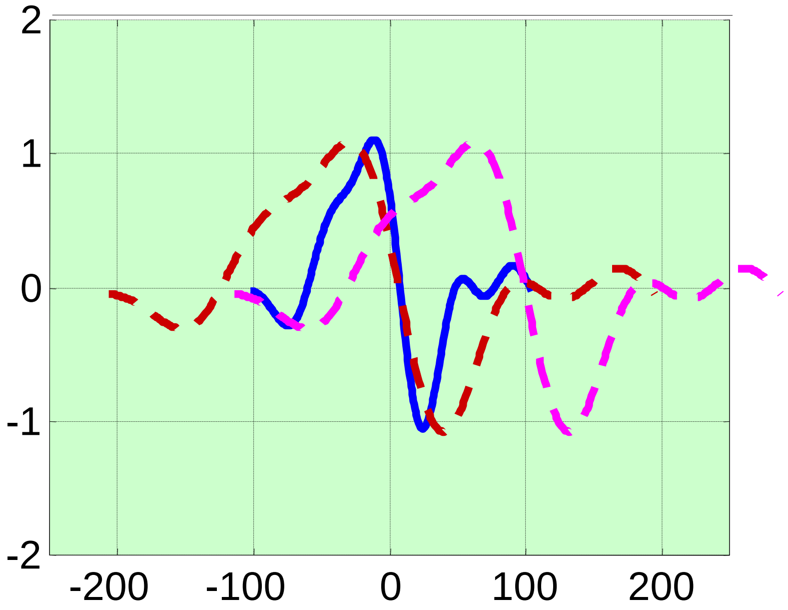
$x(t)$

$x\left(-\frac{t}{2}\right)$

$x\left(\frac{t}{2}\right)$

Ritardo (o anticipo) e scalatura

Il segnale $x(a(t-\tau))$ é la versione ritardata di τ del segnale $x(at)$ che é a sua volta la versione di $x(t)$ scalata di a



$$x(t)$$

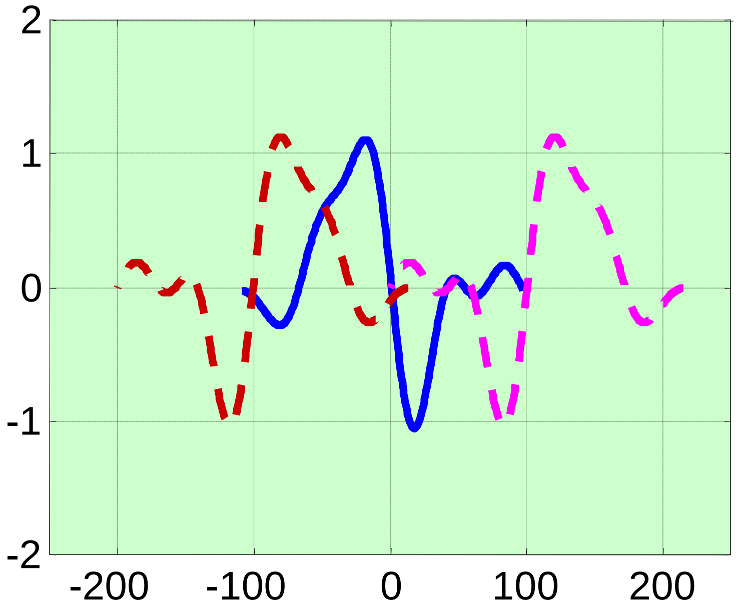
$$x\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$x\left(\frac{t}{2}-50\right)=x\left(\frac{1}{2}(t-100)\right)$$

Ribaltamento dell'asse dei tempi

Il segnale $x(-t)$ é la versione ribaltata rispetto a t=0 (cioè rispetto all'asse y) di $x(t)$

In caso di combinazione con un ritardo τ attenzione alla differenza tra $x(-t-\tau)$ ribaltato rispetto a $t=0$ e $x(-(t-\tau))$ ribaltato rispetto a $t=\tau$.



$x(t)$

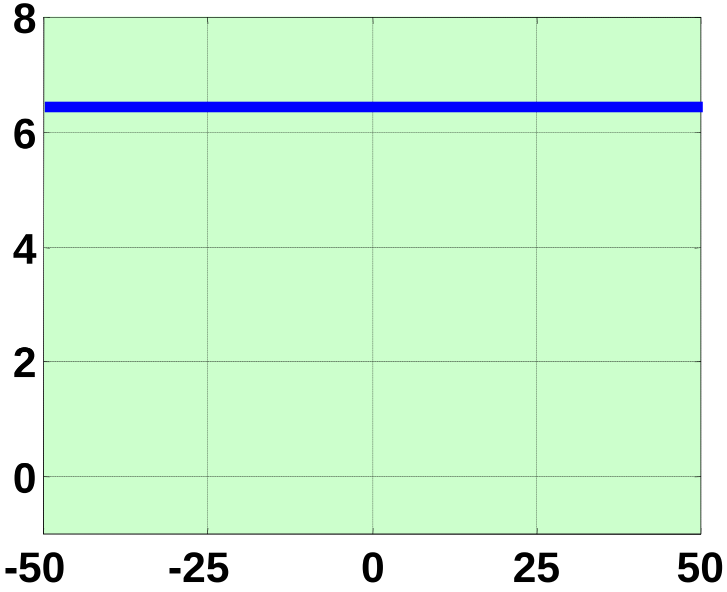
$x(-t-100)$

$x(-(t-100)) = x(-t+100)$

ESEMPI: costante e rettangolo

Costante

$$x(t) = C$$

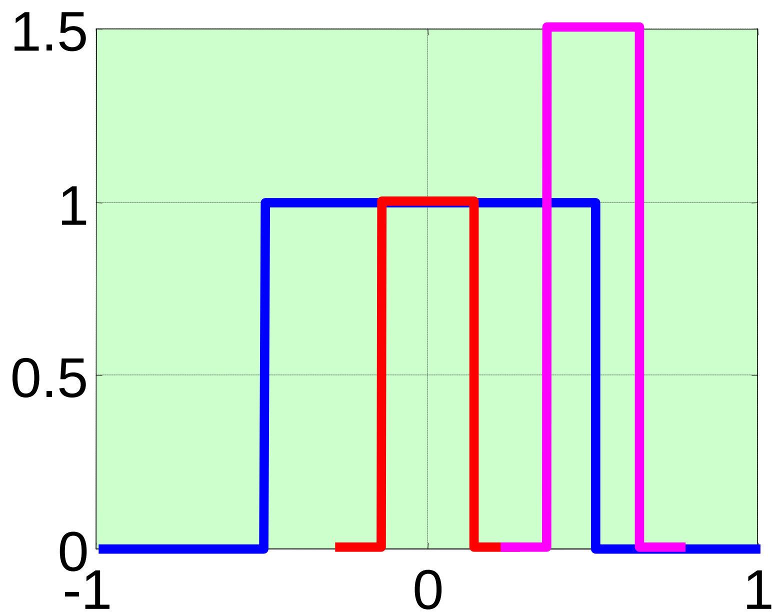


Rettangolo

$$x(t) = rect(t)$$

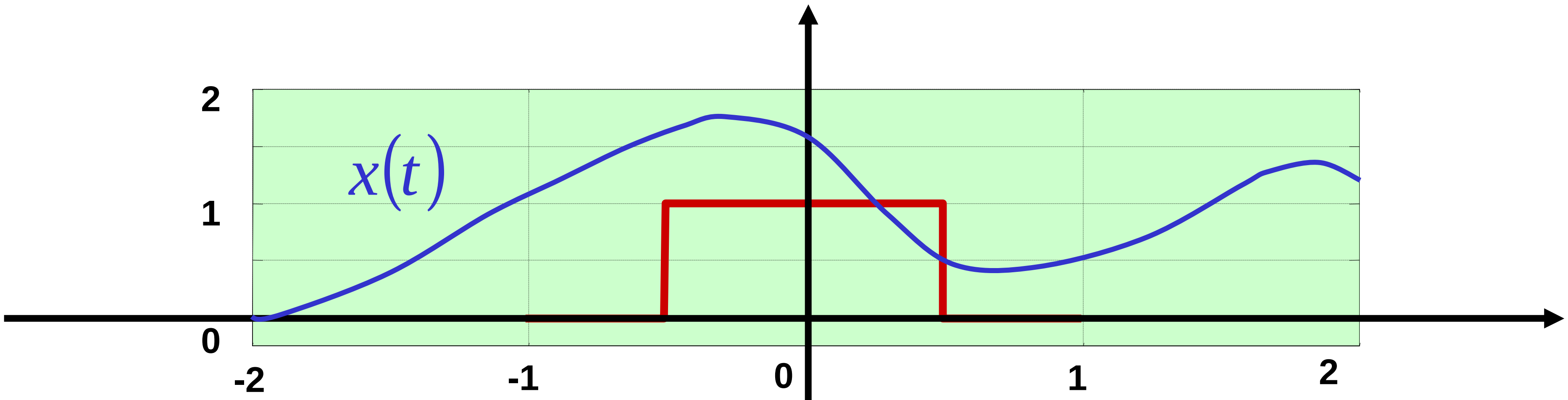
$$rect(4t)$$

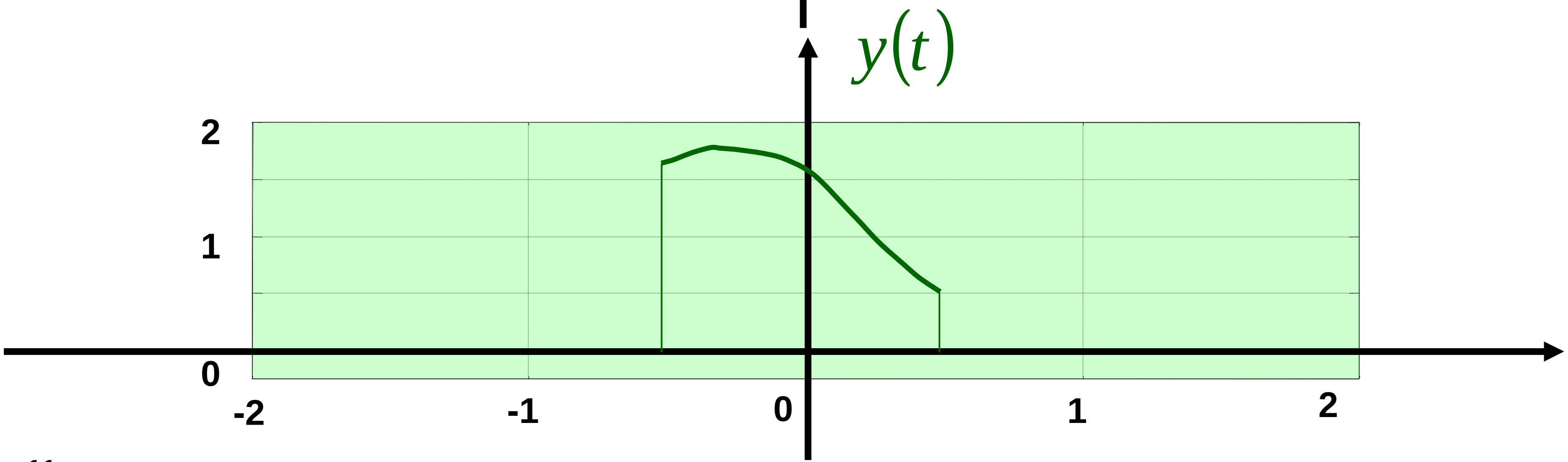
$$\frac{3}{2} rect(4(t - 1/2))$$



Moltiplicazione di un segnale per il rettangolo

$$y(t) = x(t) \cdot rect(t)$$





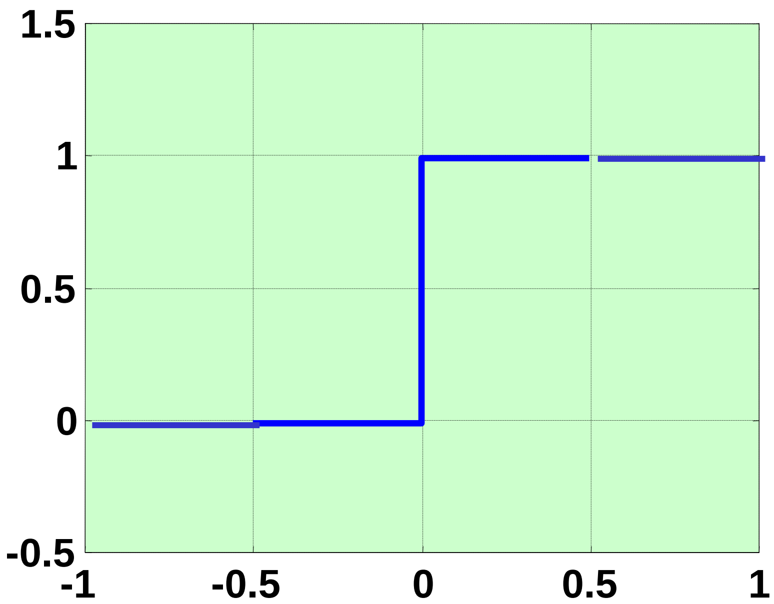
ESEMPI: scalino ed esponenziale

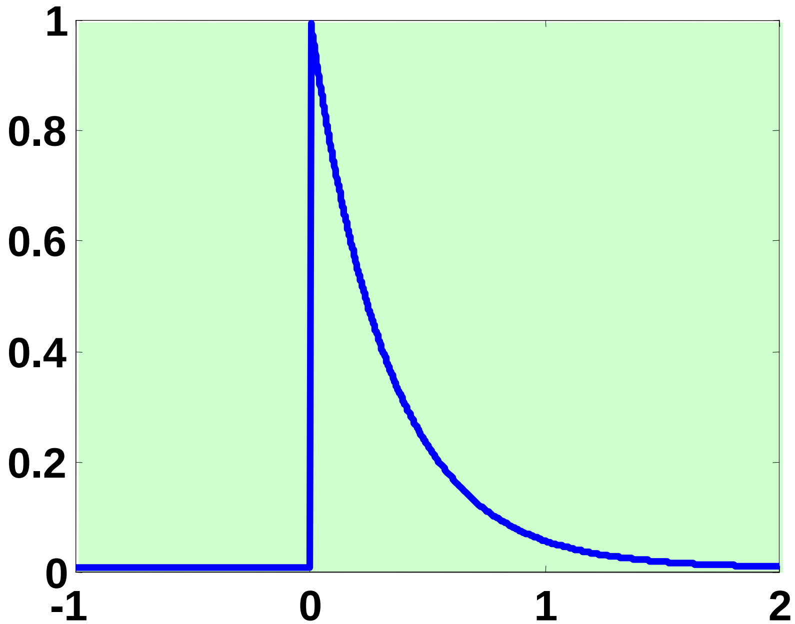
$$x(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$x(t) = exp(-at)u(t)$$

Scalino

Esponenziale $a > 0$





Energia, potenza e componente continua (valor medio)

Energia $$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Potenza istantanea $$P_i = |x(t)|^2$$

Potenza media $$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Attenzione: non sono energie e potenze “fisiche”.

Componente continua (valor medio) $$m = \overline{x(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt$$

Segnali periodici

$$P = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} |x(t)|^2 dt$$

$$m = \overline{x(t)} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, dt$$

Energia, potenza e valor medio: esempi

Segnali ad energia finita:

$$E < \infty \quad \Rightarrow \quad P = 0$$

•rettangolo

$$rect(t) \quad \rightarrow \quad E = 1$$

$$A\,rect(t/T) \quad \rightarrow \quad E = A^2 T$$

•esponenziale

$$exp(-at)\,u(t) \quad \rightarrow \quad E = \frac{1}{2a}$$

Segnali a potenza media non nulla:

$$P > 0 \quad \Rightarrow \quad E = \infty$$

•costante $P = C^2$ $m = \overline{x(t)} = C$

•scalino $P = \frac{1}{2}$ $m = \frac{1}{2}$

•segnali periodici con segnale base a energia finita (es: sinusoide, vedi oltre)

L’impulso: definizione

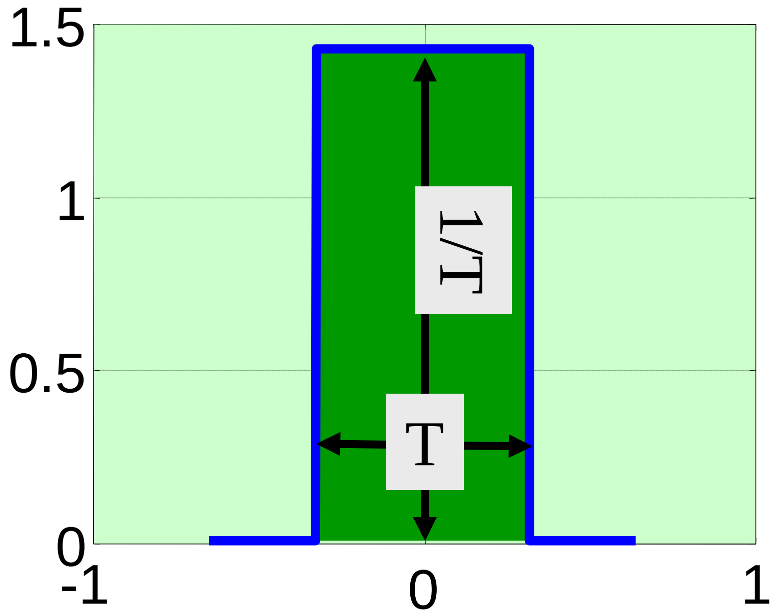
L’impulso (detto anche delta di Dirac) può essere definito (tralasciando il rigore matematico) come un rettangolo di base *T* e altezza *1/T* quando *T* tende a zero:

$$\delta(t)=\lim_{T\to 0}\frac{1}{T}rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

L’impulso e’ dunque un segnale localizzato nell’origine con base infinitesima, ampiezza infinita, ma area (integrale) unitaria:

$$\delta(t)=0 \quad \forall t\neq 0$$

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$$

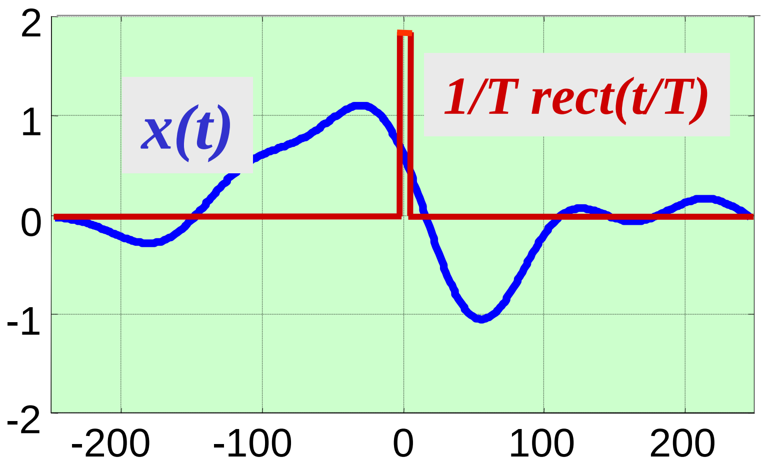


L'impulso: regole di calcolo

1 - Un segnale $x(t)$ moltiplicato per un impulso e' uguale al valore del segnale in $t=0$ per l'impulso stesso

$$x(t)\cdot\delta(t)=\lim_{T\to 0} x(t)\cdot\frac{1}{T}rect\left(\frac{t}{T}\right)=$$

$$=\lim_{T\to 0} x(0)\cdot\frac{1}{T}rect\left(\frac{t}{T}\right)=x(0)\cdot\delta(t)$$



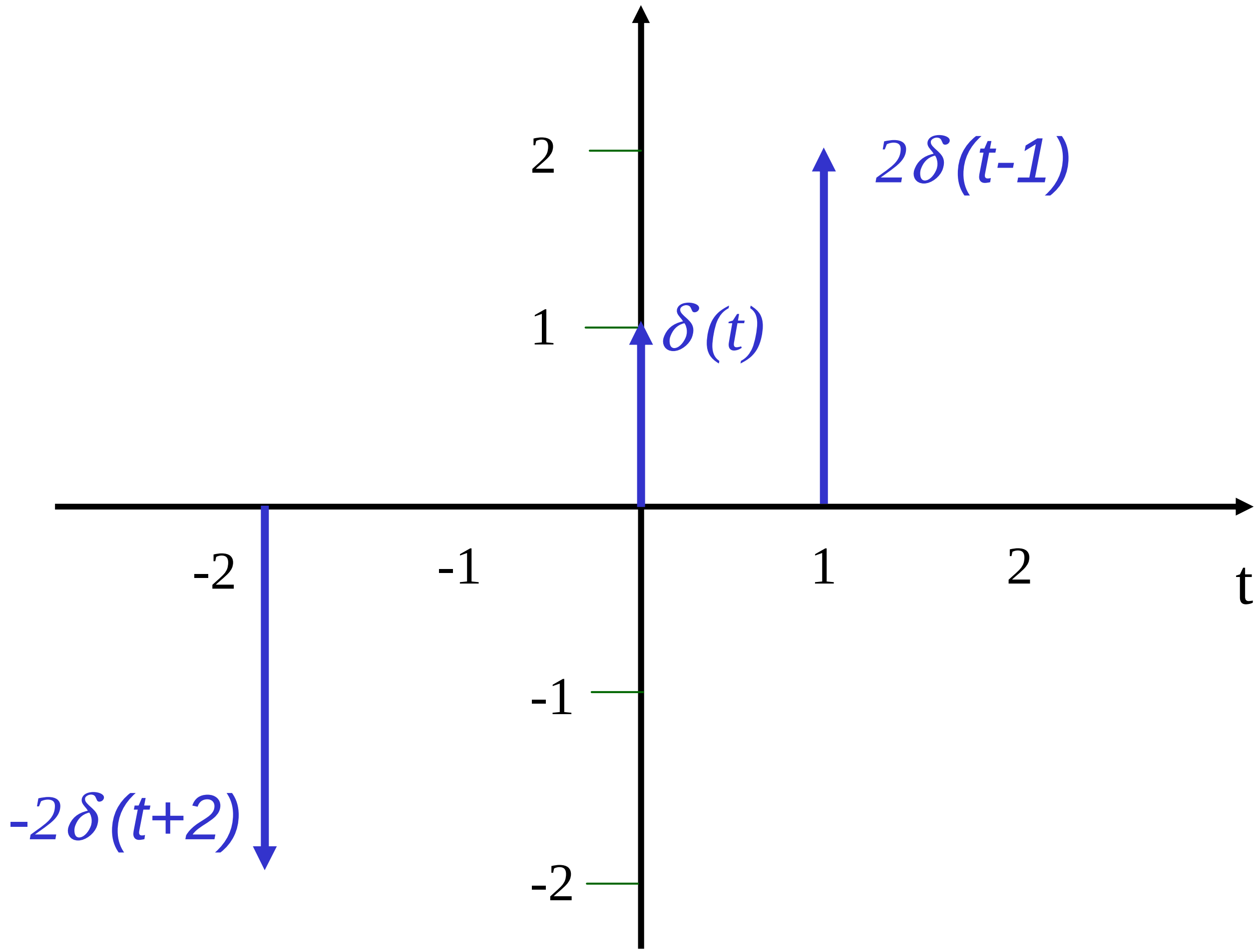
2 - Un segnale $x(t)$ moltiplicato per un impulso ritardato di τ e' uguale al valore del segnale in $t=\tau$ per l'impulso stesso:

$$x(t)\cdot\delta(t-\tau)=x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)$$

3 - L'integrale di un segnale $x(t)$ moltiplicato per un impulso ritardato di τ e' uguale al valore del segnale in $t=\tau$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\,dt = x(\tau)$$

Simbolo dell'impulso



Cosinusoide

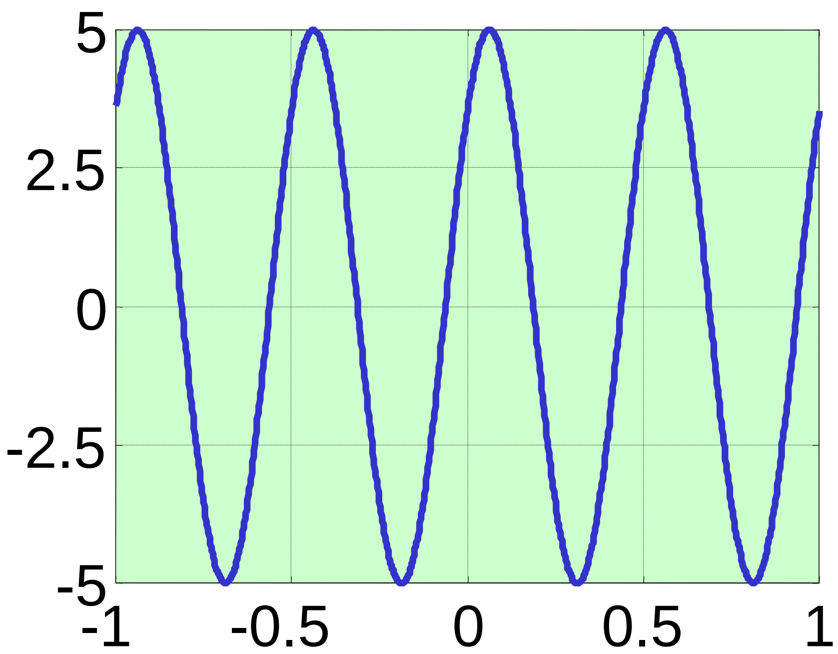
$$x(t) = A\cos\left(2\pi f_o t + \varphi\right)$$

$$P = \frac{A^2}{2}$$

$$T_o = \frac{1}{f_o}$$

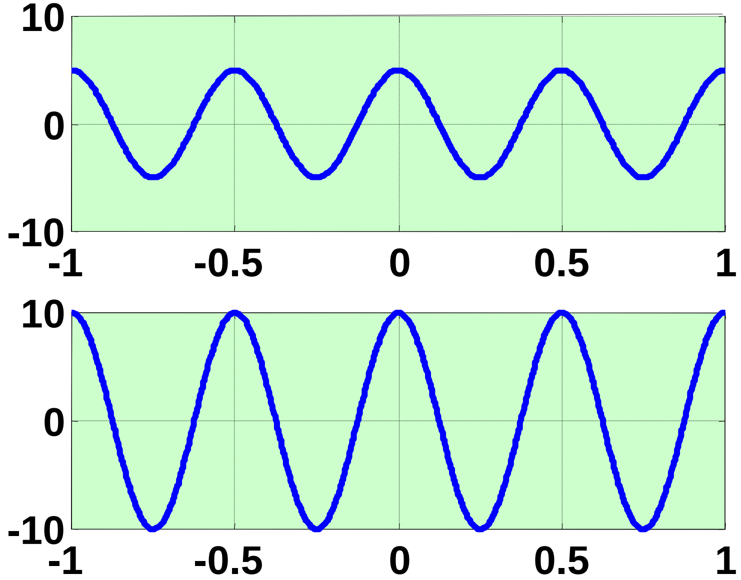
Periodo

Ampiezza **Frequenza** **Fase (iniziale)**

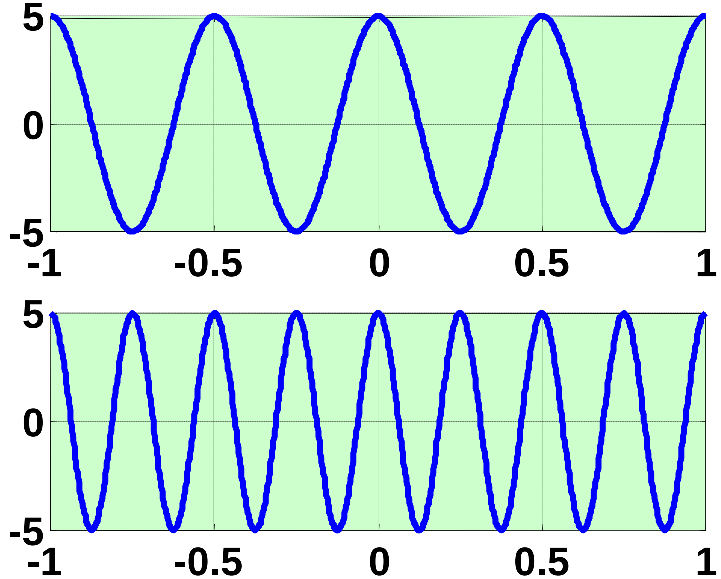


$$x(t) = 5\cos\left(2\pi 2t - \pi/4\right)$$

Cosinusoide: ampiezza, fase, frequenza

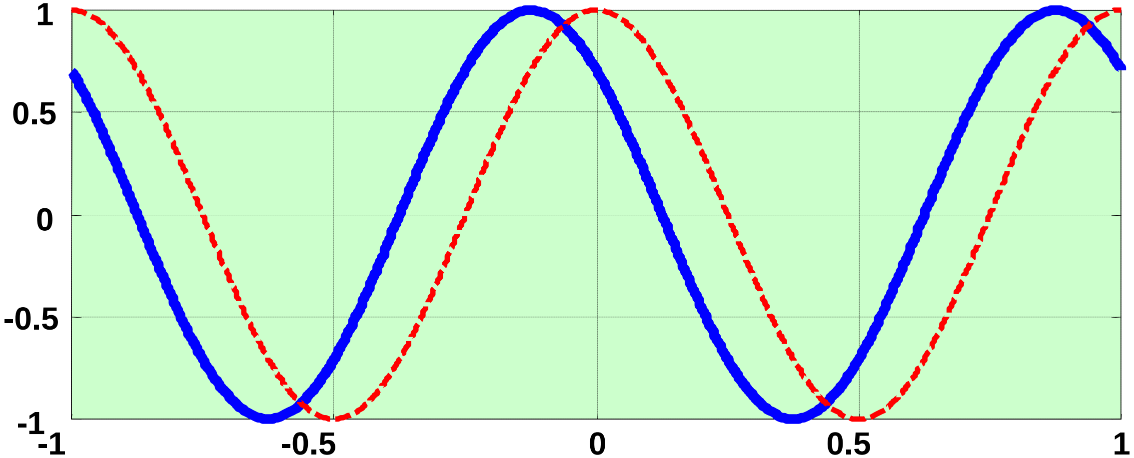


Aumenta l'ampiezza



Aumenta la frequenza

Aumenta la fase iniziale



Cosinusoide

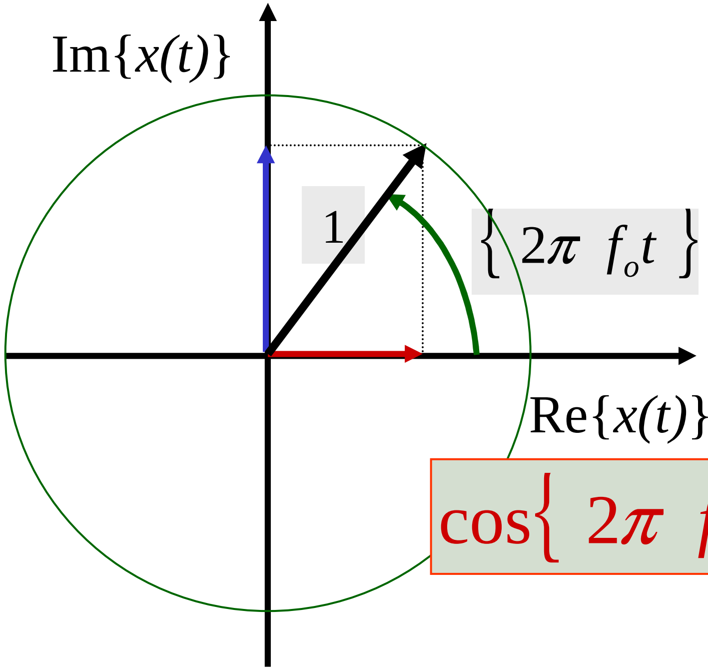
$$x(t) = A\cos(2\pi f_o t + \varphi) =$$
$$= A\cos\left\{2\pi f_o\left(t + \frac{\varphi}{2\pi f_o}\right)\right\}$$

Aumentare la fase della cosinusoide equivale ad anticipare

L'esponenziale complesso (Eulero) 1

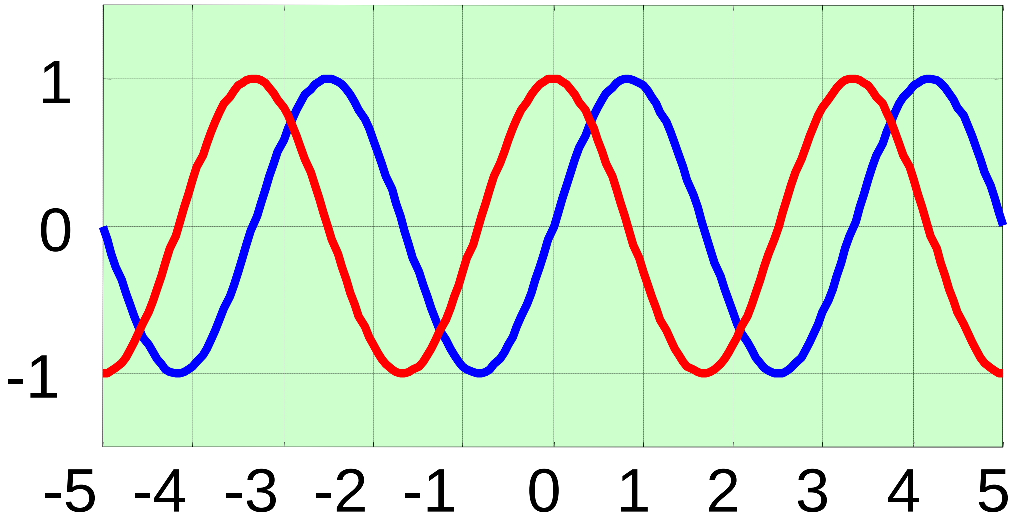
$$x(t) = \exp\left\{\ j\ 2\pi\ f_o t\ \right\}$$

$$sin\left\{\ 2\pi\ f_o t\ \right\}$$

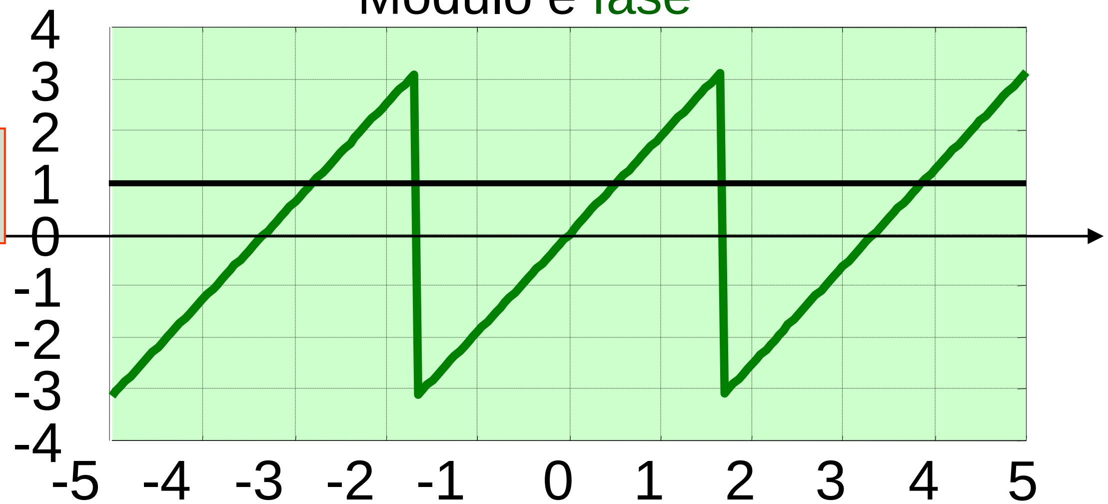


$$\cos\left\{\ 2\pi\ f_o t\ \right\}$$

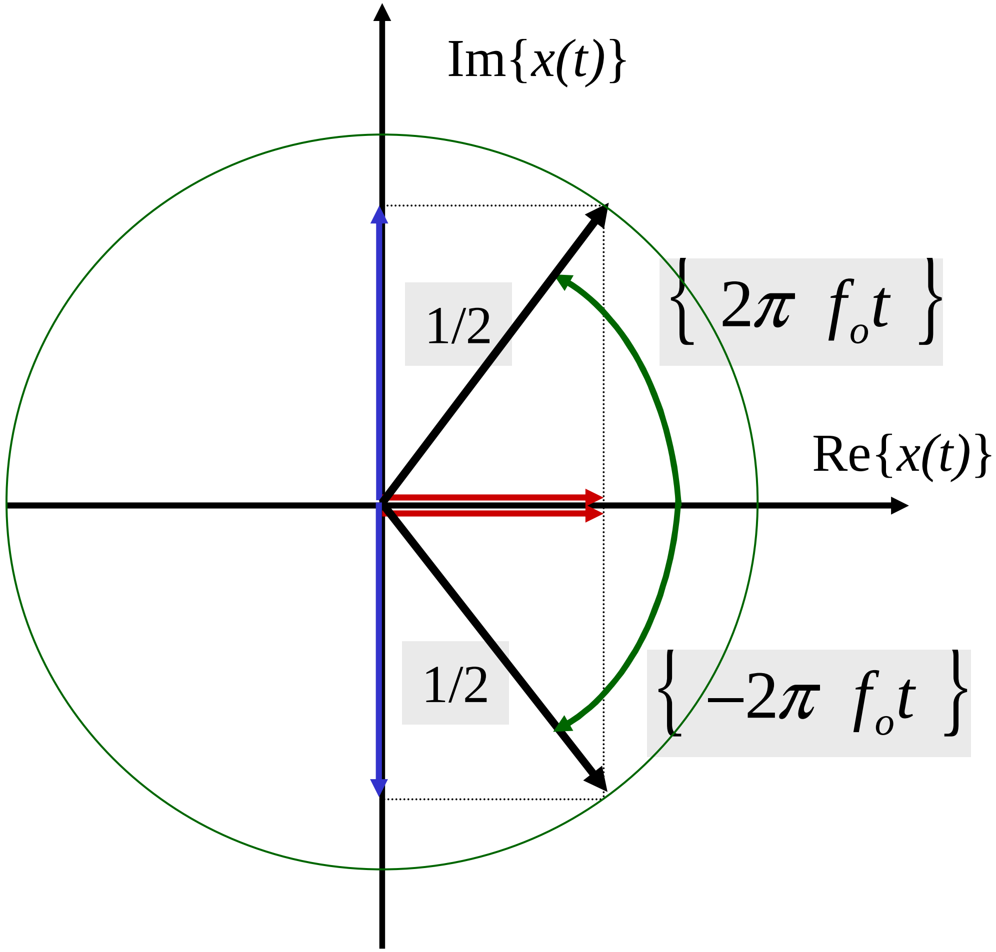
Componenti reale e immaginaria



Modulo e fase



L’esponenziale complesso (Eulero) 2



$$\cos\{\,2\pi\ f_o t\,\}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\exp\{\,j\ 2\pi\ f_o t\,\}+\\ \exp\{-j\ 2\pi\ f_o t\,\}\end{bmatrix}$$

$$\sin\{\,2\pi\ f_o t\,\}=$$

$$=\frac{1}{2j}\begin{bmatrix}\exp\{\,j\ 2\pi\ f_o t\,\}-\\ \exp\{-j\ 2\pi\ f_o t\,\}\end{bmatrix}$$

Esercizi

1. Si dica se la forma d'onda $x(t)$ è reale o complessa:

$$x(t) = \frac{j}{1+j} e^{j\pi/2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{j}{j-1} e^{j\pi/2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

2. Data la forma d'onda

$$x(t) = \begin{cases} 2 & 0 \le t \le T \\ 2(2T - t)/T & T \le t \le 2T \\ 0 & altrove \end{cases}$$

rappresentarla graficamente; disegnarne l'andamento della potenza istantanea; calcolare energia, potenza media e valor medio di $x(t)$.

3. Con riferimento alla forma d'onda $x(t)$ dell'esercizio 2, si definisce $g(t) = x(T-t/2)$ e $y(t)$ la ripetizione periodica di $g(t)$ di periodo $T_0=4T$.
Disegnare $g(t)$.
Disegnare tre periodi di $y(t)$, e calcolarne potenza media e valor medio.