RISPOSTA IN FREQUENZA DEI SISTEMI LTI

Risposta in frequenza dei sistemi LTI

Se il segnale d'ingresso di un sistema Lineare Tempo-Invariante (LTI) e' un esponenziale complesso l'uscita sara' ancora un esponenziale complesso con la stessa frequenza, ma con ampiezza e fase modificate.

$$A \exp\left\{ j\left(2\pi f_o t + \vartheta\right)\right\}$$

Sistema LTI

h(t)

$$B \exp\left\{ j\left(2\pi f_o t + \varphi\right)\right\}$$

Risposta in frequenza:

E' la funzione della frequenza che descrive come vengono modificate ampiezza e fase di un esponenziale complesso quando passa attraverso un sistema LTI.

Risposta in frequenza dei sistemi LTI (2)

$$x(t) = \exp\{j2\pi\ ft\}$$

Sistema L T I

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\ h(\tau)\ d\tau$$

$$y(t) = \exp\{j2\pi\ ft\} \cdot H(f)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{j2\pi\ f(t-\tau)\}\ h(\tau)\ d\tau = \exp\{j2\pi\ ft\} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\ \exp\{-j2\pi\ f\tau\}\ d\tau =$$

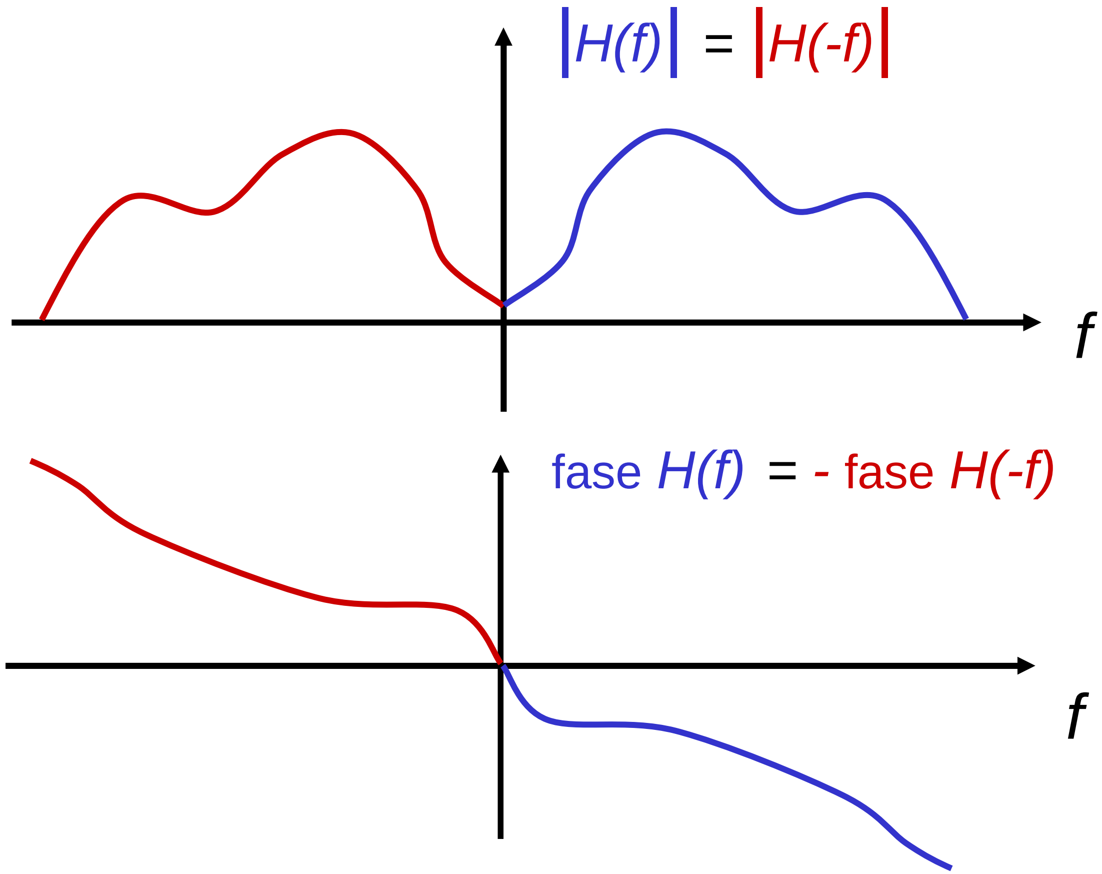
$$= \exp\{j2\pi\ ft\}\ H(f)$$

L’uscita di un sistema LTI alimentato da un ingresso esponenziale complesso e’ ancora un esponenziale complesso con la stessa frequenza dell’ingresso.

L’ampiezza e la fase iniziale dell’uscita dipendono dalla risposta in frequenza *H(f)* del sistema LTI.

Risposta in frequenza di sistemi reali

Se il sistema LTI ha risposta all'impulso $h(t)$ reale, la risposta in frequenza $H(f)$ e' una funzione con simmetria complessa coniugata: $H(f) = H^*(-f)$ (come si verifica facilmente dalla definizione di $H(f)$). Dunque il modulo di $H(f)$ e' pari (<u>simmetrico rispetto all'origine</u>) e la fase di $H(f)$ e' dispari (<u>antisimmetrica rispetto all'origine</u>).



Risposta in frequenza di sistemi reali (2)

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\left[\exp\{j2\pi f_0 t\} + \exp\{-j2\pi f_0 t\}\right]$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \frac{1}{2}\left[\exp\{j2\pi f_0 t\}H(f_0) + \exp\{-j2\pi f_0 t\}H(-f_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\exp\{j2\pi f_0 t\}H(f_0) + \exp\{-j2\pi f_0 t\}H^*(f_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left|H(f_0)\right| \cdot \left[\exp\{j(2\pi f_0 t + \varphi)\} + \exp\{-j(2\pi f_0 t + \varphi)\}\right] =$$

$$= \left|H(f_0)\right| \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$\varphi = fase\ H(f_0)$$

Risposta in frequenza e banda passante

La risposta in frequenza *H(f)* e' una funzione **complessa** della frequenza che dipende solo dalla risposta all'impulso del sistema *h(t).*

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\ \exp\{-\, j2\pi\ ft\}\, dt$$

La risposta in frequenza *H(f)* consente d'introdurre il concetto di **banda passante** di un sistema LTI (tipicamente un canale di trasmissione).

Il modulo della risposta in frequenza avra' valori piu' elevati in una banda di frequenze (detta banda passante) e relativamente piu' bassi alle altre frequenze.

All'uscita del sistema LTI, gli esponenziali complessi con frequenza compresa nella banda passante del sistema avranno ampiezza molto maggiore di quelli con frequenza esterna a tale banda. Si usa dire che i primi "passano" attraverso il sistema, mentre i secondi no.

Trasformata di Fourier

L'operatore che consente di ottenere la risposta in frequenza *H(f)* a partire dalla risposta all'impulso del sistema *h(t),* viene detto **trasformata di Fourier.**

La trasformata di Fourier puo' essere calcolata per un generico segnale *x(t)*, non solo per la risposta all'impulso di un sistema LTI:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ \exp\{-j2\pi\ ft\}\, dt$$

L'operatore che consente di riottenere il segnale *x(t)* a partire dalla sua trasformata di Fourier *X(f)* viene detto **trasformata inversa di Fourier:**

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp\{j2\pi\ ft\}\, df$$

Si noti che la trasformata di Fourier e la sua inversa sono uguali, a parte il segno dell'esponente.

Segnali come somma di esponenziali complessi

La trasformata Inversa di Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp\{j2\pi ft\}\, df$$

ha la seguente interpretazione:

un qualsiasi segnale *x(t)* puo' essere scomposto nella somma (integrale) di esponenziali complessi le cui ampiezze (infinitesime) e fasi iniziali in funzione della frequenza sono date dalla trasformata di Fourier *X(f)* :

$$\text{Ampiezza}: |X(f)|\, df \qquad \text{Fase iniziale}: \angle X(f)$$

Sistemi LTI: legame ingresso-uscita in frequenza

1 - Se l'ingresso e' un esponenziale complesso $x(t) = A \exp\{ j\,2\pi\, f\, t \}$,
l'uscita e' $y(t)= H(f)\, A \exp\{ j\,2\pi\, f\, t \}$

2 - Un generico segnale $x(t)$ puo' essere scomposto nella somma (integrale) di esponenziali complessi (di ampiezza infinitesima) del tipo $X(f) \exp\{ j\,2\pi\, f\, t \}\, df$

3 - L'uscita $y(t)$ di un sistema LTI per un generico segnale d'ingresso $x(t)$ e' data dalla somma (integrale) di esponenziali complessi $H(f)\, X(f) \exp\{ j\,2\pi\, f\, t \}\, df$

4 - L'uscita $y(t)$, come tutti i segnali, puo' essere scomposta nella somma di esponenziali complessi del tipo $Y(f) \exp\{ j\,2\pi\, f\, t \}\, df$

Quindi:

$$\boxed{Y(f) = H(f)X(f)}$$

Questo risultato corrisponde ad una importante proprieta' della trasformata di Fourier, che verra' ripresa nel seguito: la trasformata della convoluzione ($y(t) = h(t) * x(t)$) e' il prodotto delle trasformate ($Y(f) = H(f)X(f)$).

Esercizi sui sistemi LTI

1. La sinusoide $x(t) = \sin(2t/T)$ è l'ingresso di un sistema LTI con risposta in frequenza:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fT + (j2\pi fT)^2}$$

Si determini l'uscita. Si calcolino valor medio e potenza di ingresso e di uscita.

2. Un sistema LTI con risposta all'impulso

$$h(t) = \begin{cases} 1 - t/T & 0 \le t \le T, \\ 0 & altrove \end{cases}$$

riceve in ingresso un segnale a scalino $x(t) = Au(t)$. Si calcoli l'uscita. Si calcolino energia, potenza e valor medio, di ingresso e uscita.

3. Un sistema LTI con ingresso $A\sin(2\pi f_0 t)$ ha come uscita $2\pi A f_0 \cos(2\pi f_0 t)$ per ogni valore di frequenza f_0. Qual'é la risposta in frequenza del sistema?

4. Un sistema LTI ha risposta in frequenza $H(f)$ e ingresso $x(t)$ pari a:

$$H(f) = \frac{1}{(1 + j2\pi fT)^6} \qquad x(t) = \cos\left(\frac{t}{T}\right)$$

calcolare l'uscita $y(t)$ la sua potenza media, e la potenza media di $x(t)$.