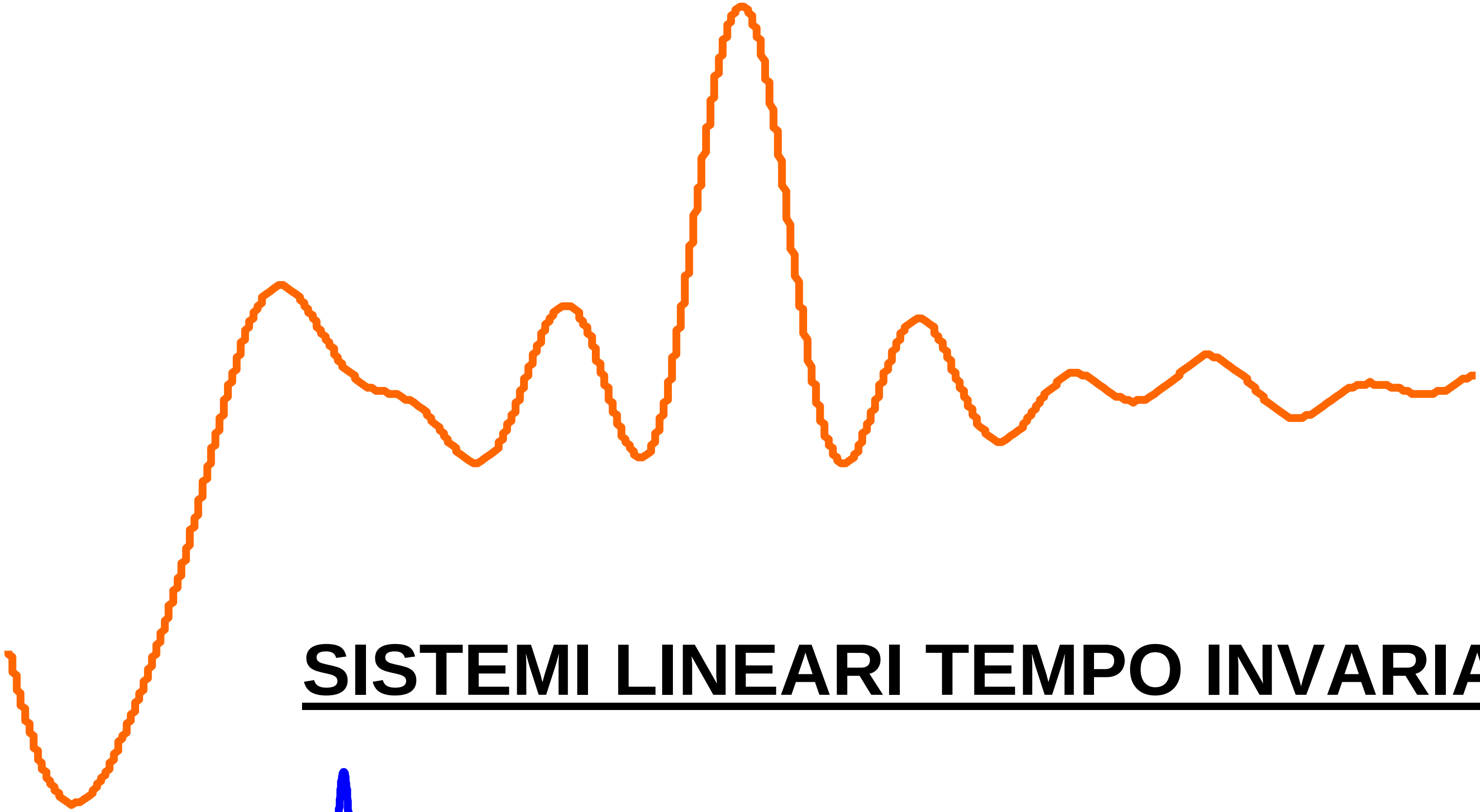
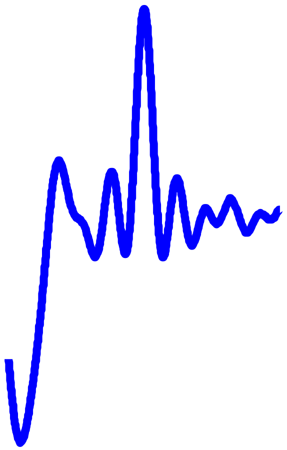


SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI



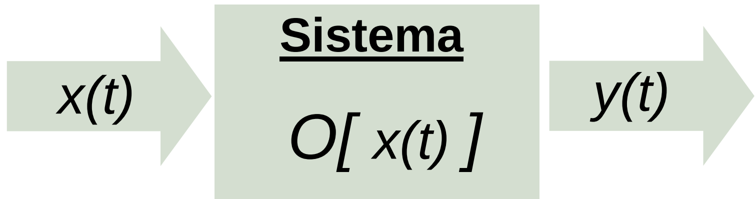
Definizione di sistema

Sistema:

Da un punto di vista fisico e' un dispositivo che modifica un segnale $x(t)$, detto **ingresso**, generando il segnale $y(t)$, detto **uscita**.

Da un punto di vista formale il segnale d'ingresso $x(t)$ viene "manipolato" tramite un generico operatore matematico indicato con $O[.]$. Il risultato delle operazioni matematiche eseguite sull'ingresso e' il segnale d'uscita $y(t)$.

Schema a blocchi



Sistemi Lineari Tempo-Invarianti (LTI)

Lineare: quando l'uscita generata dalla combinazione lineare di due o piu' ingressi e' uguale alla combinazione lineare delle uscite generate dai singoli ingressi

$ax_1(t)+bx_2(t)$

Sistema Lineare

$$O[ax_1(t)+bx_2(t)]=aO[x_1(t)]+bO[x_2(t)]$$

$ay_1(t)+by_2(t)$

Tempo Invariante: quando l'uscita generata da un segnale ritardato e' uguale all'uscita generata dal segnale originale, ritardata della stessa quantita'.

$x(t-\tau)$

Sistema Tempo Invariante

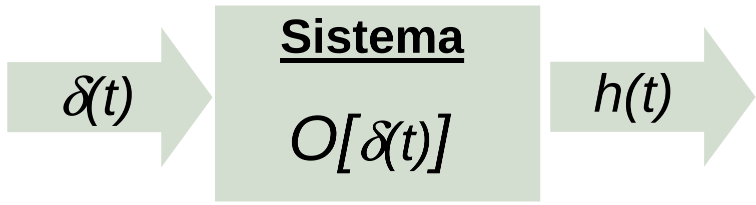
$$O[x(t-\tau)]$$

$y(t-\tau)$

Risposta all'impulso

Risposta all'impulso: e' l'uscita del sistema quando l'ingresso e' l'impulso.
Viene solitamente indicata con il simbolo ***h(t)***

$$h(t) = O[\delta(t)]$$



Se il sistema e' tempo-invariante, la forma della risposta all'impulso non dipende dall'istante in cui si applica l'impulso. Quando l'ingresso e' un impulso anticipato o ritardato l'uscita e' uguale ad ***h(t)*** anticipata o ritardata:

$$h(t-\tau) = O[\delta(t-\tau)]$$

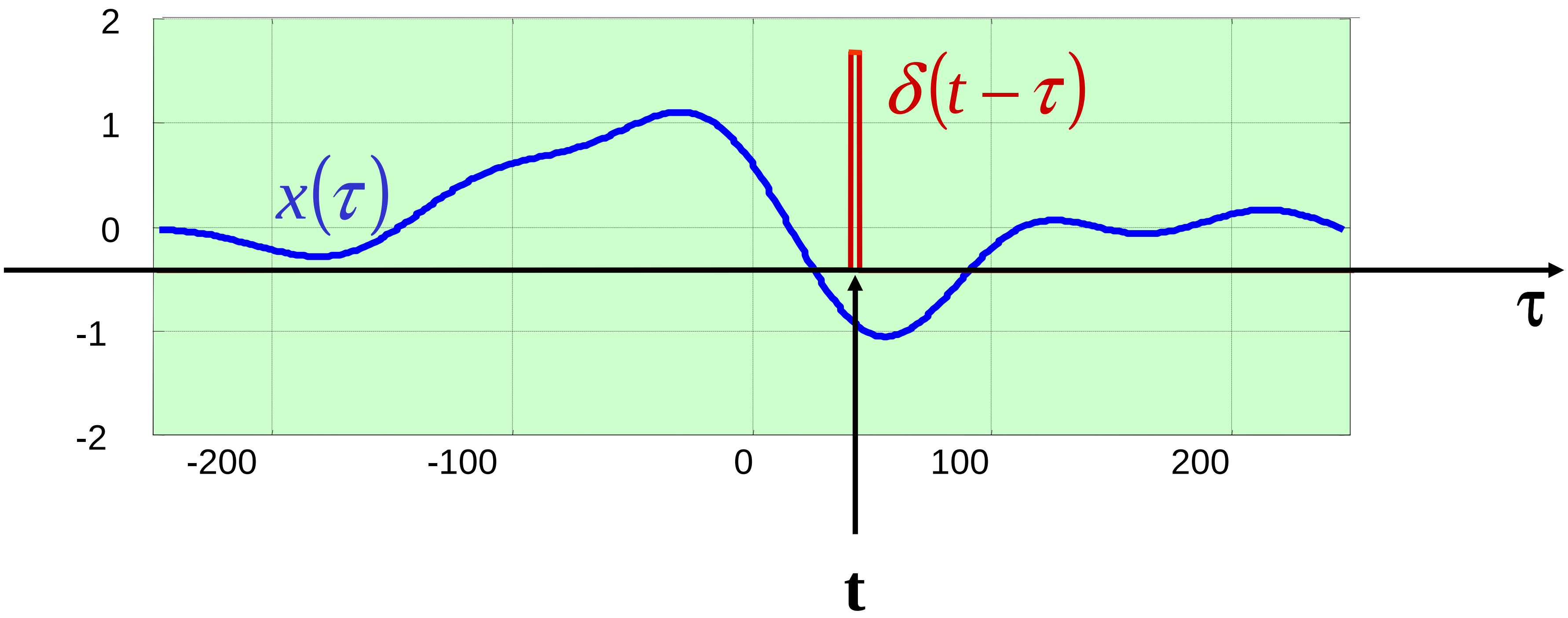
Se il sistema e' anche lineare, nota la risposta all'impulso e' possibile calcolare l'uscita del sistema quando l'ingresso e' una qualsiasi combinazione lineare d'impulsi:

$$y(t) = O[a\delta(t) + b\delta(t-\tau_1) + c\delta(t-\tau_2)] =$$
$$= ah(t) + bh(t-\tau_1) + ch(t-\tau_2)$$

Rappresentazione di un segnale come combinazione lineare di impulsi

Un qualsiasi segnale *x(t)* puo' essere rappresentato come somma integrale di impulsi

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \delta(t-\tau)\, d\tau = x(t)$$



La convoluzione

Abbiamo visto che:

1 - Nota la risposta all'impulso, e' possibile calcolare l'uscita di un sistema LTI quando l'ingresso e' una qualsiasi combinazione lineare d'impulsi

2 - Un qualsiasi segnale *x(t)* puo' essere rappresentato come somma integrale di impulsi

Ne segue che:

$$\boxed{y(t)} = O[x(t)] = O\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \delta(t-\tau)\ d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ O[\delta(t-\tau)]\, d\tau =$$

$$\underbrace{\boxed{= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\ x(t-\tau)\, d\tau}}_{\text{integrale di convoluzione (o semplicemente convoluzione)}} = x(t) * h(t)$$

integrale di convoluzione (o semplicemente convoluzione)

$*$ = simbolo della convoluzione

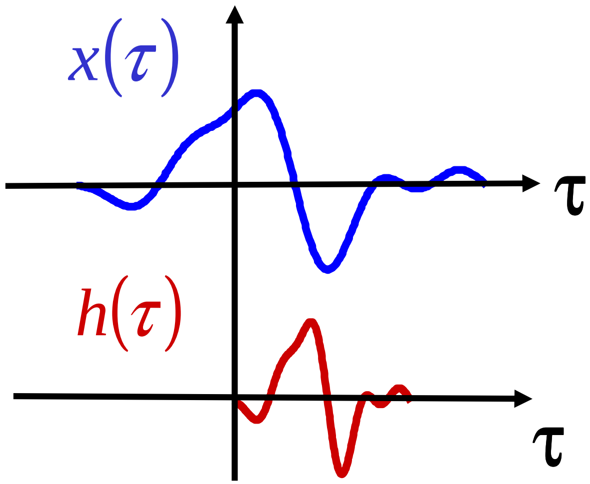
uscita = convoluzione tra ingresso e risposta all'impulso del sistema LTI

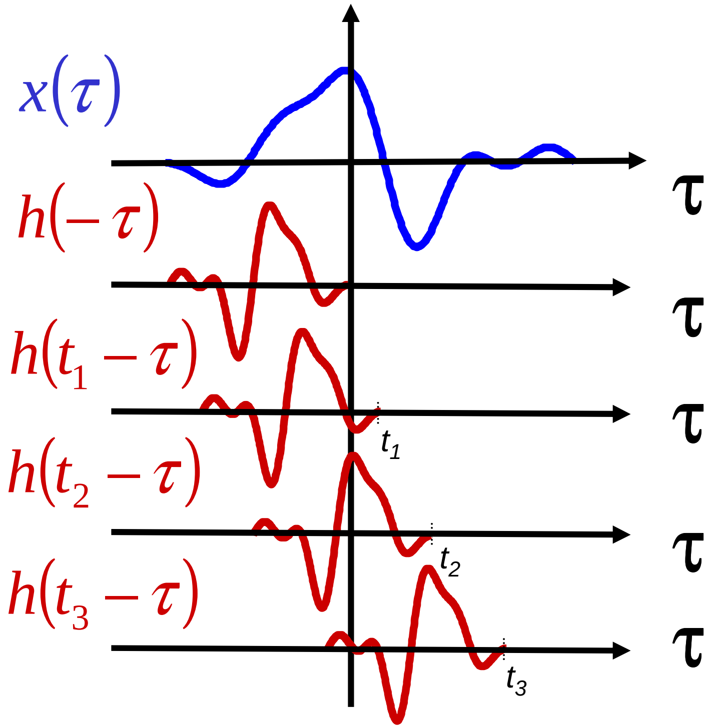
Calcolo dell'integrale di convoluzione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\; h(t-\tau)\; d\tau$$

L' integrando $\quad x(\tau)\; h(t-\tau)$

e' il prodotto tra il segnale $x(\tau)$ e la risposta all'impulso $h(\tau)$ ribaltata in τ traslata di t (verso destra se $t>0$, verso sinistra se $t<0$)



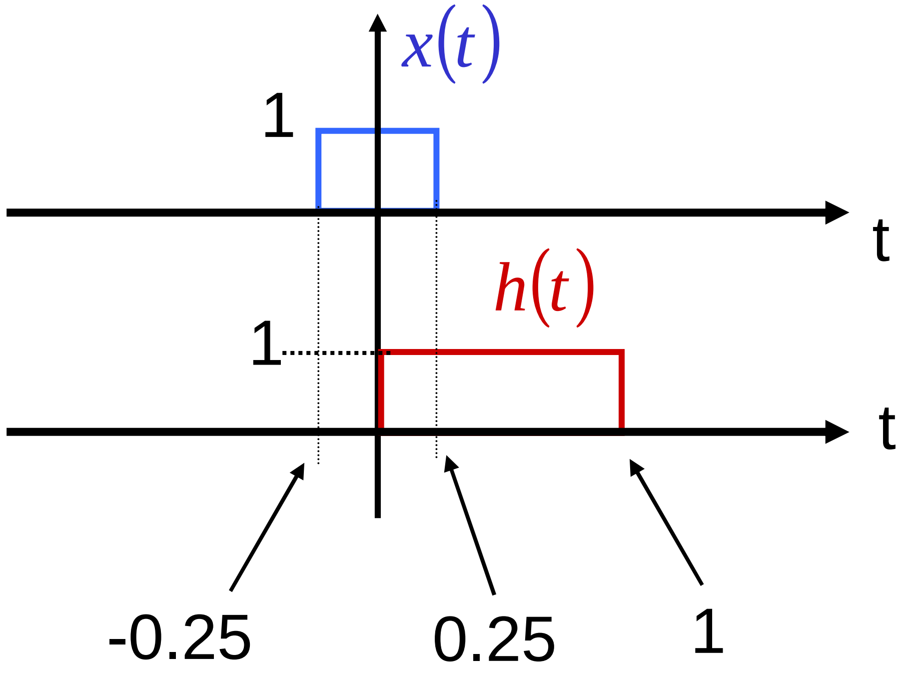


Esempi di calcolo della convoluzione (1)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\; h(t-\tau)\; d\tau$$

$$x(t) = \mathrm{rect}(2t)$$

$$h(t) = \mathrm{rect}(t - 1/2)$$

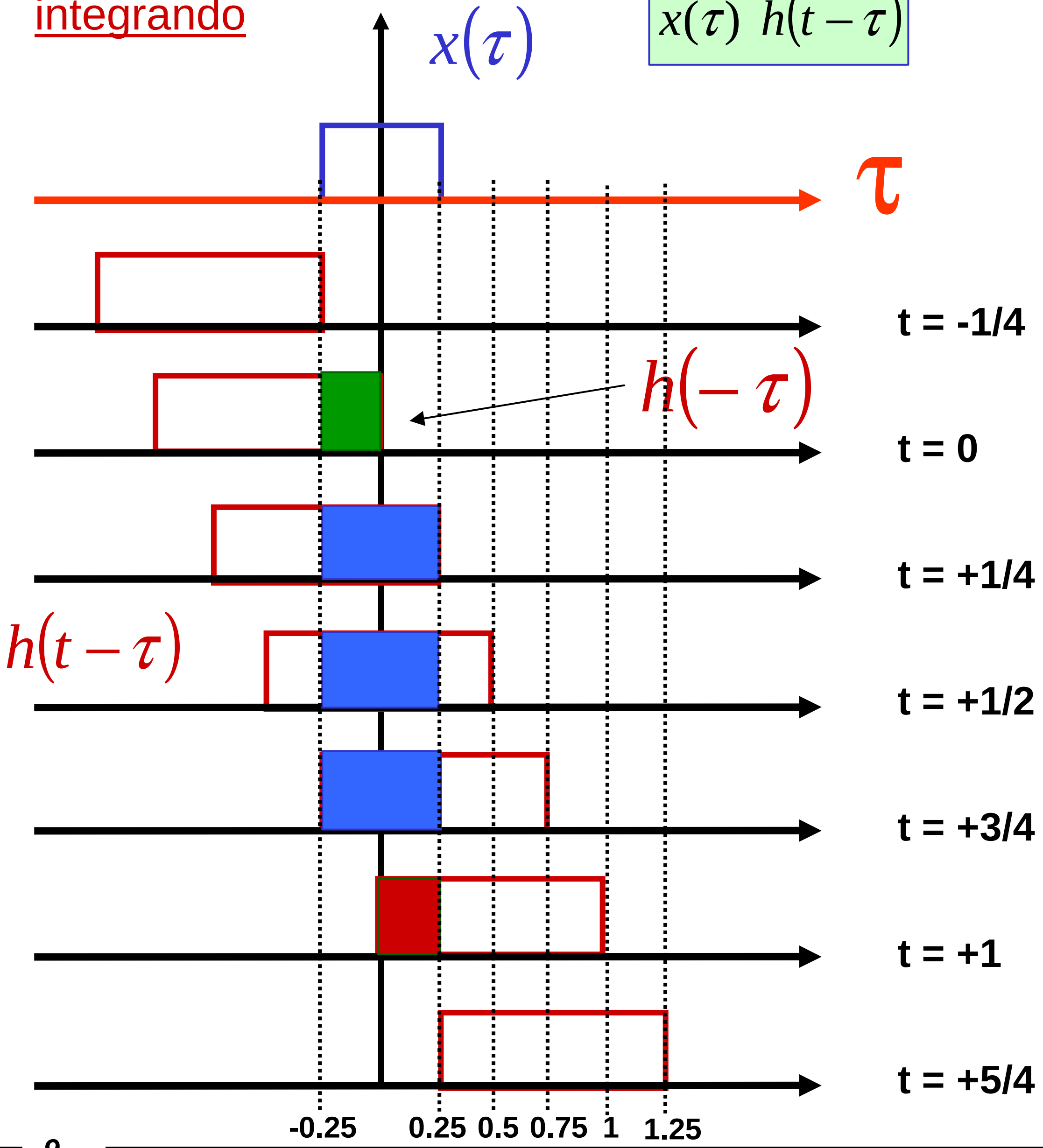


Esempi di calcolo della convoluzione (2)

$$x(t) = \mathrm{rect}(2t)$$
$$h(t) = \mathrm{rect}(t - 1/2)$$

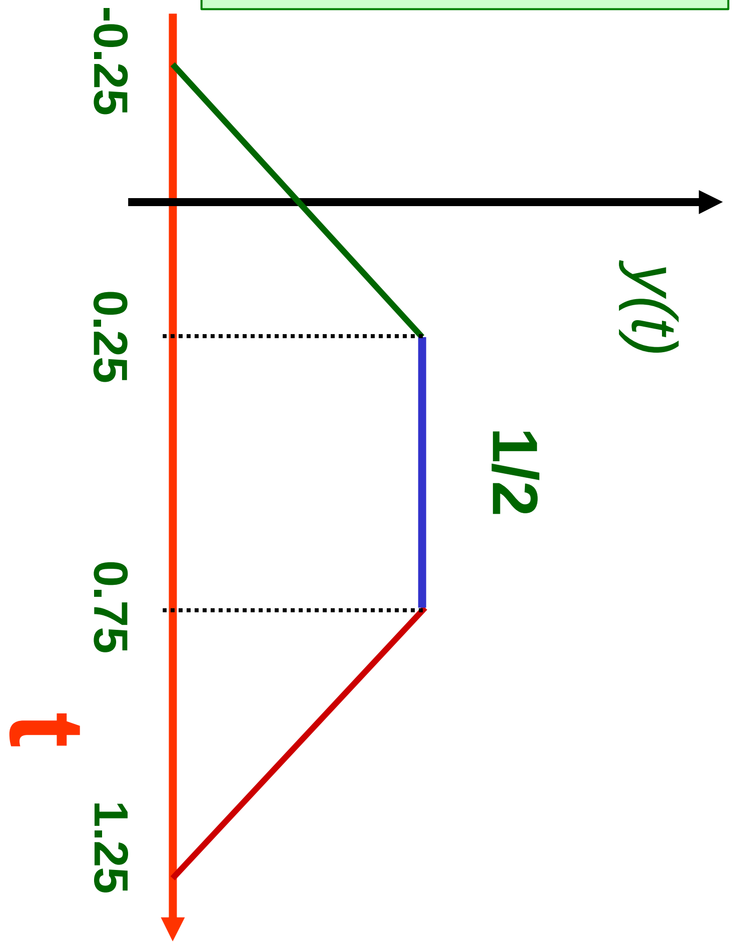
integrando

$$x(\tau)\ h(t-\tau)$$



Integrale

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\, d\tau$$



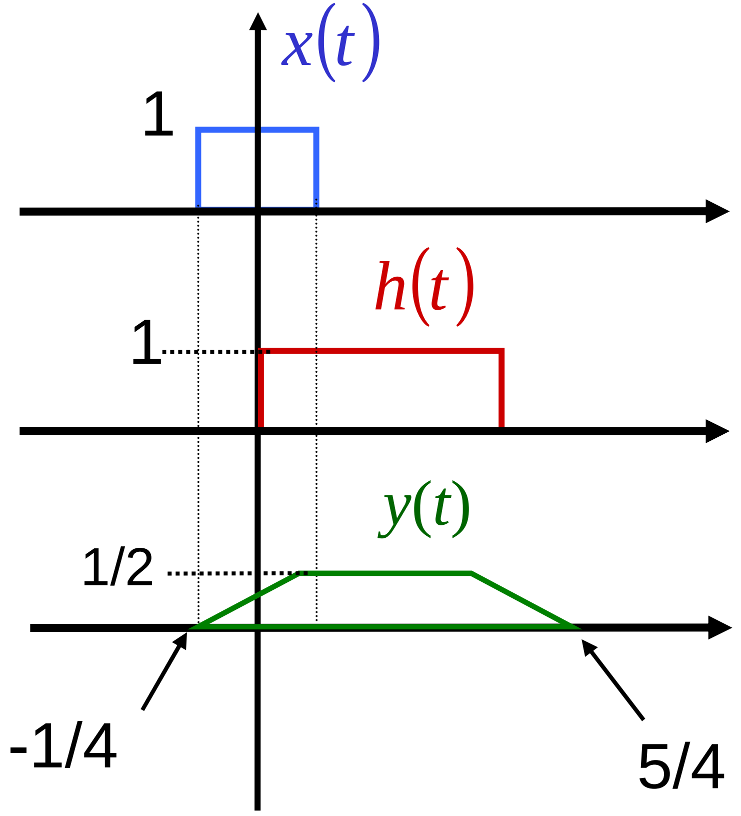
Osservazioni su $y(t) = rect(2t) * rect(t - 1/2)$

$x(t)$ "inizia" nell'istante $t_x = -1/4$
$h(t)$ "inizia" nell'istante $t_h = 0$

$\Rightarrow$ $y(t)$ "inizia" nell'istante $t_x + t_h = -\frac{1}{4}$

$x(t)$ "dura" 1/2
$h(t)$ "dura" 1

$\Rightarrow$ $y(t)$ "dura" $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$



$y(t)$ é lineare a tratti e continua, perché convoluzione di funzioni costanti a tratti

Inoltre, dalla definizione di sistemi LTI si deducono le seguenti proprietà della convoluzione:

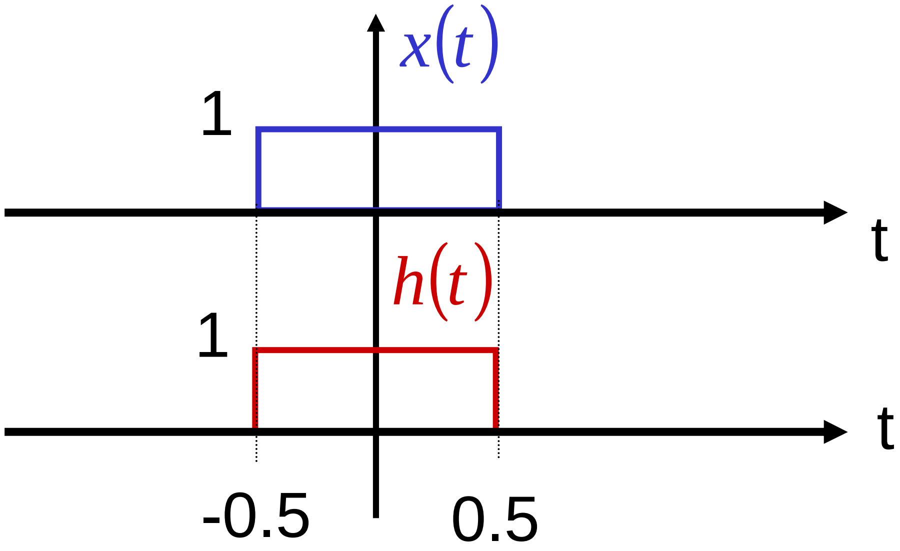
1) Se $x(t)*h(t)=y(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t-t_0)*h(t)=y(t-t_0) \\ x(t)*h(t-t_0)=y(t-t_0) \\ x(t-t_0)*h(t-t_1)=y(t-t_0-t_1) \end{cases}$

2)
$$x(t)*\delta(t)=x(t)$$
$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

Esempi di calcolo della convoluzione (3)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\; h(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = h(t) = \mathrm{rect}(t)$$



Esempi di calcolo della convoluzione (4)

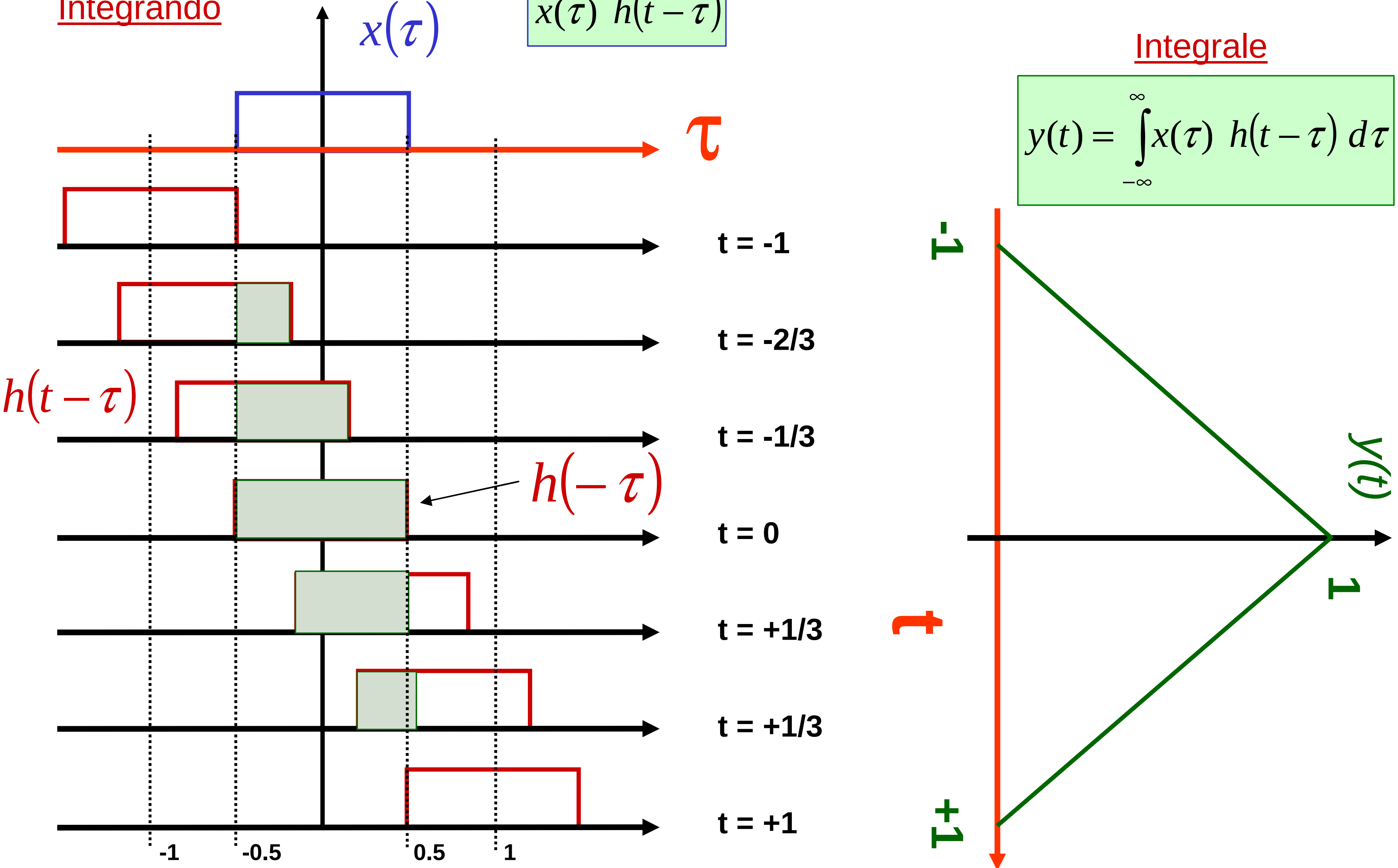
$$x(t) = h(t) = \mathrm{rect}(t)$$

Integrando

$$x(\tau)\; h(t-\tau)$$

Integrale

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\; h(t-\tau)\, d\tau$$



Causalità dei Sistemi L.T.I. (1)

<u>Definizione</u>:

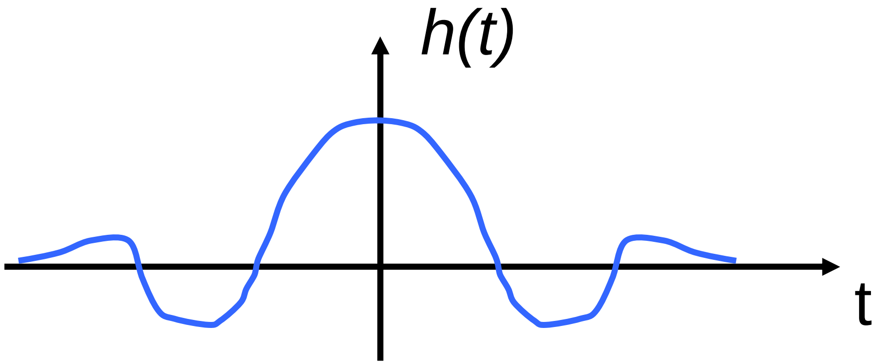
Un sistema L.T.I. è detto causale se l'uscita y(t) per un $t=\bar{t}$, dipende dai valori dell'ingresso x(t) solo per valori della variabile $t\le\bar{t}$.
La condizione di causalità è molto importante se la variabile indipendente è il tempo: in questo caso un sistema fisico <u>deve</u> essere causale. Se ciò non fosse infatti il sistema sarebbe in grado di predire il futuro.

<u>Condizione da rispettare per garantire la causalità:</u>

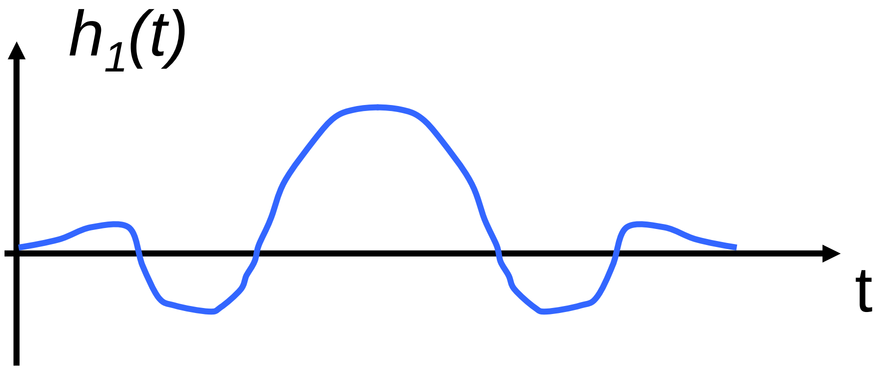
$$h(t) = 0 \ \text{ per } t < 0$$

Causalità dei Sistemi L.T.I. (2)

Spesso nel seguito utilizzeremo risposte all'impulso del tipo:



Questa risposta all'impulso <u>non</u> è causale: puo' essere resa causale attraverso opportuni troncamenti (nel tempo, se *h(t)* si estende da -∞ a ∞) e ritardi.

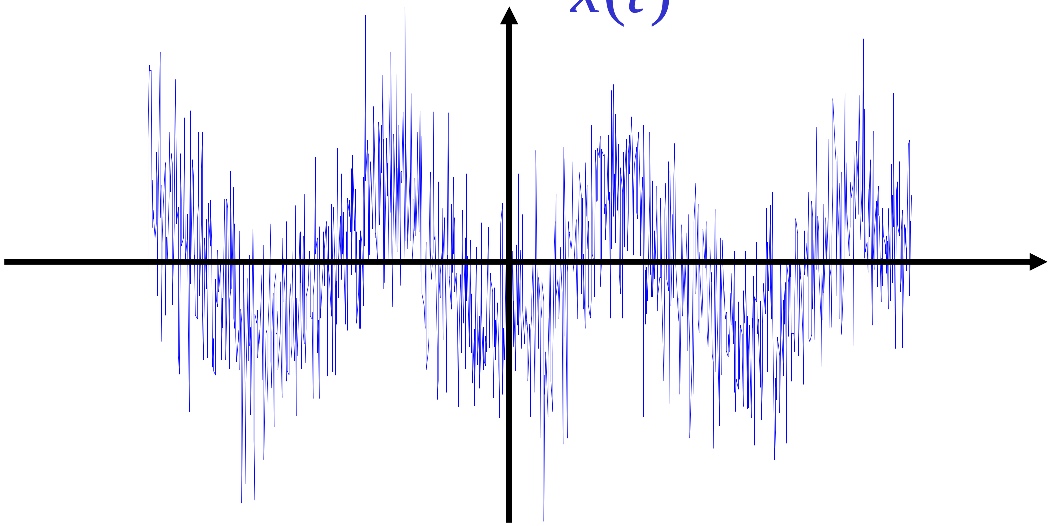


Utilizzare *h(t)* invece che $h_1(t)$ significa trascurare (cioe' sottintendere) i ritardi necessari a rendere causale la risposta all'impulso.

Effetti della convoluzione (filtro passa-basso)

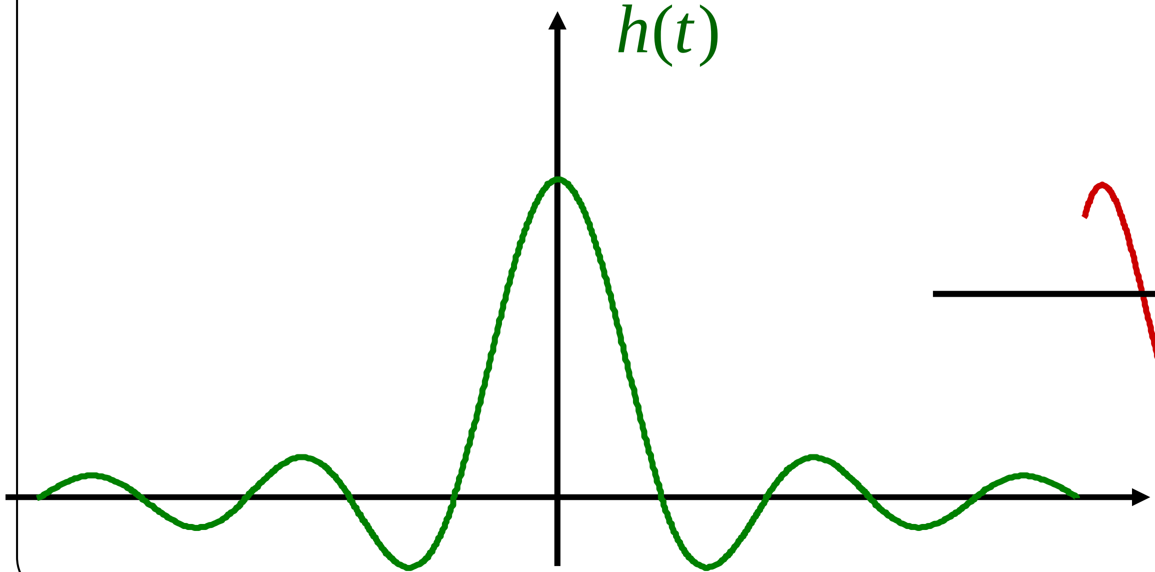
Le componenti del segnale rapidamente variabili nel tempo (ad alta frequenza) vengono eliminate dalla convoluzione con una risposta all'impulso lentamente variabile nel tempo (filtro passa-basso)

$x(t)$

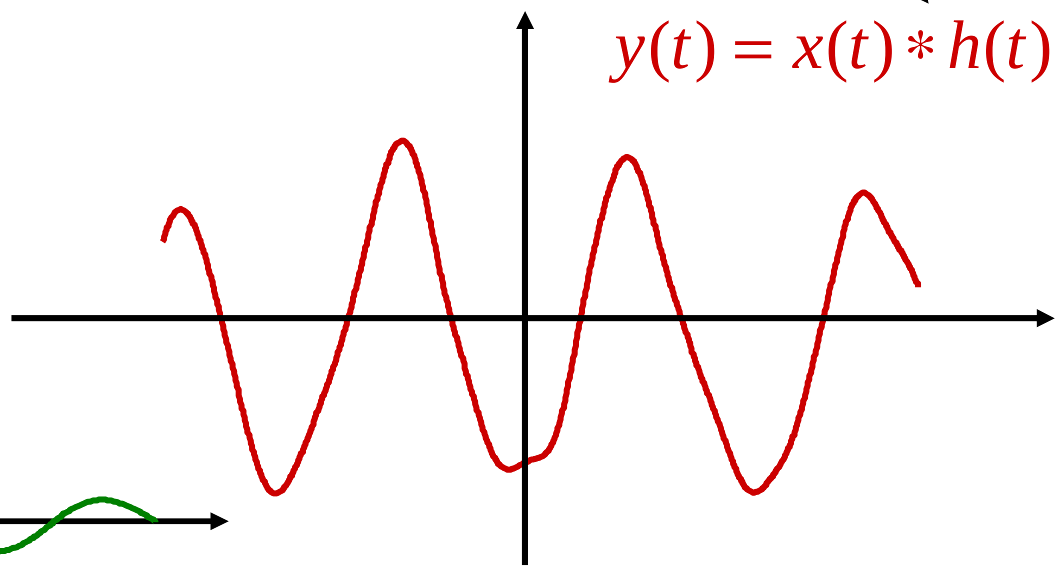


Simbolo della convoluzione

$h(t)$



$$y(t) = x(t) * h(t)$$



Esercizi

1. Una funzione a scalino x(t) = Au(t) è l'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso h(t) = exp(-αt)u(t). Si calcoli l'uscita come convoluzione di ingresso e risposta all'impulso.

2. Un sistema LTI con risposta impulsiva

$$h(t) = \begin{cases} 2 & 0 \le t \le 2T \\ 0 & altrove \end{cases}$$

ha in ingresso

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T \\ -1 & T \le t \le 2T \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Si calcoli l'uscita y(t). Quanto valgono, in particolare, y(0), y(T) e y(2T)? Si calcolino anche energia, valor medio e potenza dell'ingresso, della risposta all'impulso e dell'uscita.

3. Valutare la convoluzione $y(t) = x(t) * h(t)$ con:

$$x(t) = 2\,\delta(t) + \delta(t - 1/2)$$
$$h(t) = rect(t - 1/2)$$