LA TRASFORMATA DI FOURIER, PROPRIETA' ED ESEMPI (2)

Proprieta' della TDF (5)

9 **Moltiplicazione nelle frequenze**: la TDF inversa del prodotto delle TDF di due segnali e' uguale all'integrale di convoluzione dei segnali nei tempi. L'integrale di convoluzione e' un operatore utilizzato, per esempio, per descrivere come vengono modificati i segnali quando passano attraverso sistemi lineari tempo-invarianti.

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \xrightarrow{\text{TDF}} \quad X(f)H(f)$$

10 **Moltiplicazione nei tempi**: la TDF del prodotto di due segnali e' uguale all'integrale di convoluzione delle due TDF (nelle frequenze).

$$x(t)y(t) \quad \xrightarrow{\text{TDF}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi)Y(f-\xi)d\xi$$

Proprieta' della TDF (6)

11 **Relazione di Parseval**: l'energia di un segnale e' uguale all'integrale del modulo quadrato della sua TDF

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$|X(f)|^2$ integrata su tutto l'asse delle frequenze fornisce l'energia del segnale.

$|X(f)|^2\, df$ rappresenta l'energia del segnale in ogni intervallo di frequenze infinitesimo *df*.

$|X(f)|^2$ viene detta DENSITA' SPETTRALE DI ENERGIA

La trasformata di Fourier dell'impulso

Un impulso di area unitaria ha come TDF una costante unitaria nei tempi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) exp\left\{- j2\pi \ \ ft\right\} dt = 1$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{TDF}} 1$$

Quindi, per dualità, la TDF di una costante unitaria é un impulso nelle frequenze.

$$1 \xrightarrow{\text{TDF}} \delta(f)$$

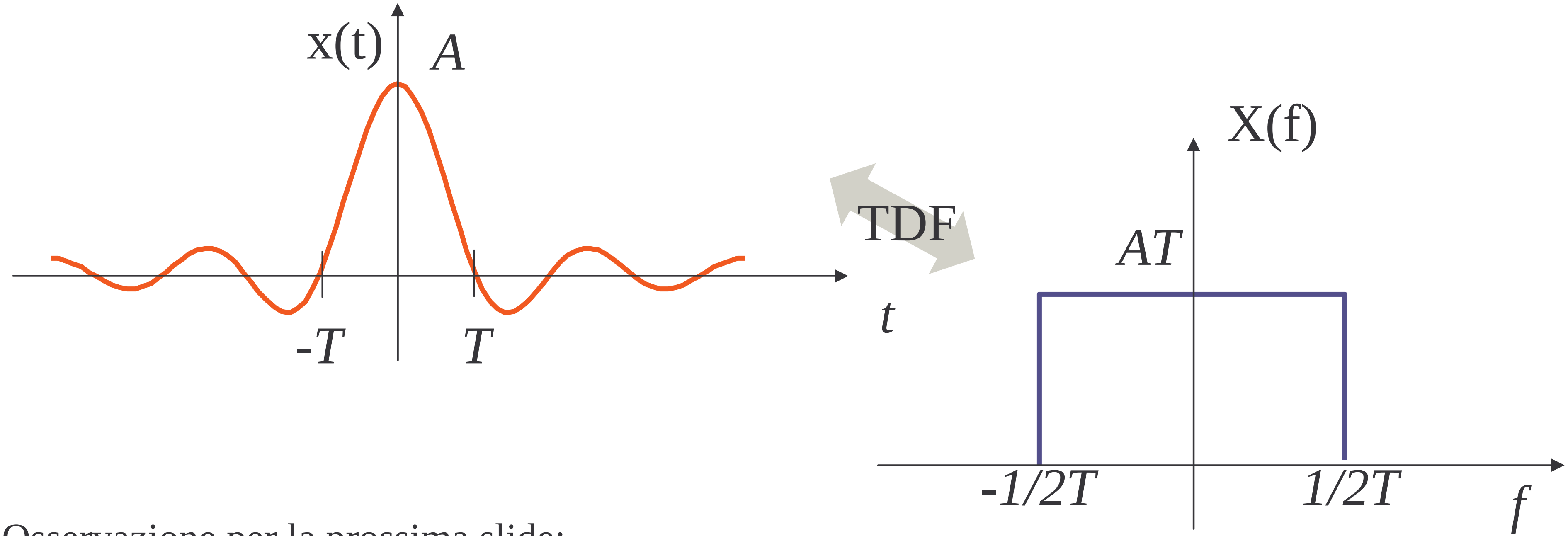
Inoltre, per le proprietà legate alla traslazione nei tempi e nelle frequenze:

$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{TDF}} e^{-j2\pi f t_0}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TDF}} \delta(f - f_0)$$

Esempi di trasformata di Fourier (il sinc)

$$x(t) = A\,sinc\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = AT\,rect(fT)$$



Osservazione per la prossima slide:

$$\frac{\sin(2\pi a t)}{\pi t} = 2a\,\text{sinc}(2at) \quad \Leftrightarrow \quad rect\left(\frac{f}{2a}\right) \xrightarrow[a\to+\infty]{} 1 \quad \Rightarrow \quad 2a\,\text{sinc}(2at) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \delta(t)$$

Trasformata inversa di Fourier (traccia di dimostrazione)

Calcolata la trasformata di Fourier *X(f)* del segnale *x(t)*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)\,d\tau$$

(dove si preferisce la variabile d'integrazione τ per non confonderla poi con *t)* si antitrasformi integrando nell'intervallo (–*a*,+*a*), che si fara' poi tendere all'infinito:

$$\int_{-a}^{a} X(f)\exp(j2\pi ft)\,df = \int_{-a}^{a} df \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\exp(j2\pi f(t-\tau))\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,d\tau \int_{-a}^{a} \exp(j2\pi f(t-\tau))\,df = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\frac{\sin 2\pi a(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}\,d\tau =$$

$$= x(t) * \frac{\sin 2\pi at}{\pi t} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} x(t)$$

in quanto $\dfrac{\sin 2\pi at}{\pi t} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \delta(t)$

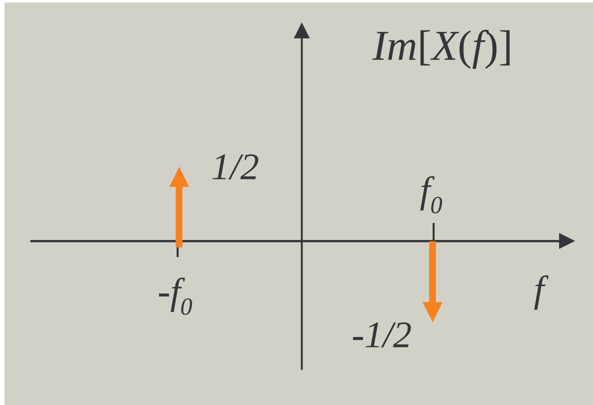
La trasformata di Fourier del seno e del coseno

La trasformata di Fourier del seno si ricava da quella della costante utilizzando le proprieta’ di traslazione nelle frequenze e di linearita’:

$$x(t) = sin(2\pi f_o t) = \frac{j}{2} exp\{-j2\pi f_o t\} - \frac{j}{2} exp\{j2\pi f_o t\}$$

$$\Big\Downarrow \text{TDF}$$

$$X(f) = \frac{j}{2}\delta(f + f_o) - \frac{j}{2}\delta(f - f_o)$$

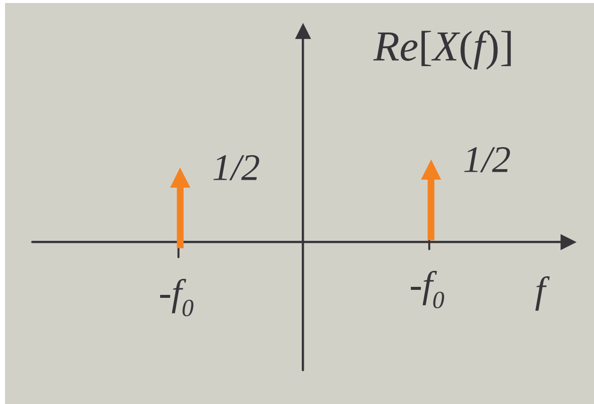


La trasformata di Fourier del coseno di conseguenza:

$$x(t) = cos(2\pi f_o t) = \frac{1}{2} exp\{j2\pi f_o t\} + \frac{1}{2} exp\{-j2\pi f_o t\}$$

$$\Big\Downarrow \text{TDF}$$

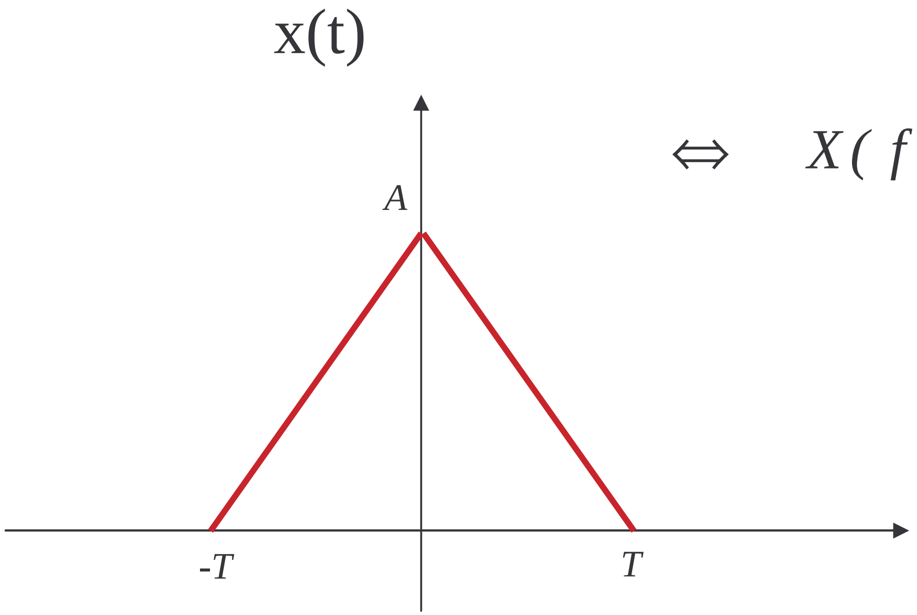
$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_o) + \frac{1}{2}\delta(f + f_o)$$



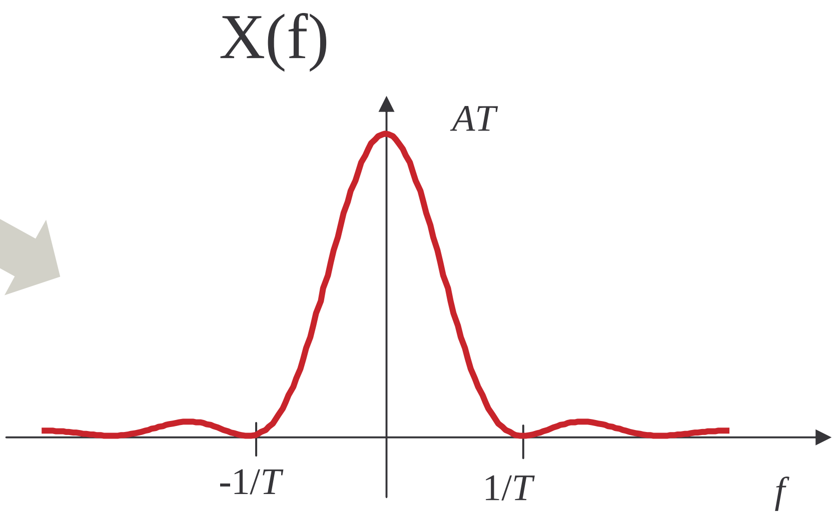
Esempi di trasformata di Fourier (il triangolo)

$$x(t) = A\,tri\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{A}{T}\left(rect\left(\frac{t}{T}\right) * rect\left(\frac{t}{T}\right)\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{A}{T}\left(T\,sinc(fT)\right)^2 = AT\,sinc^2(fT)$$



F



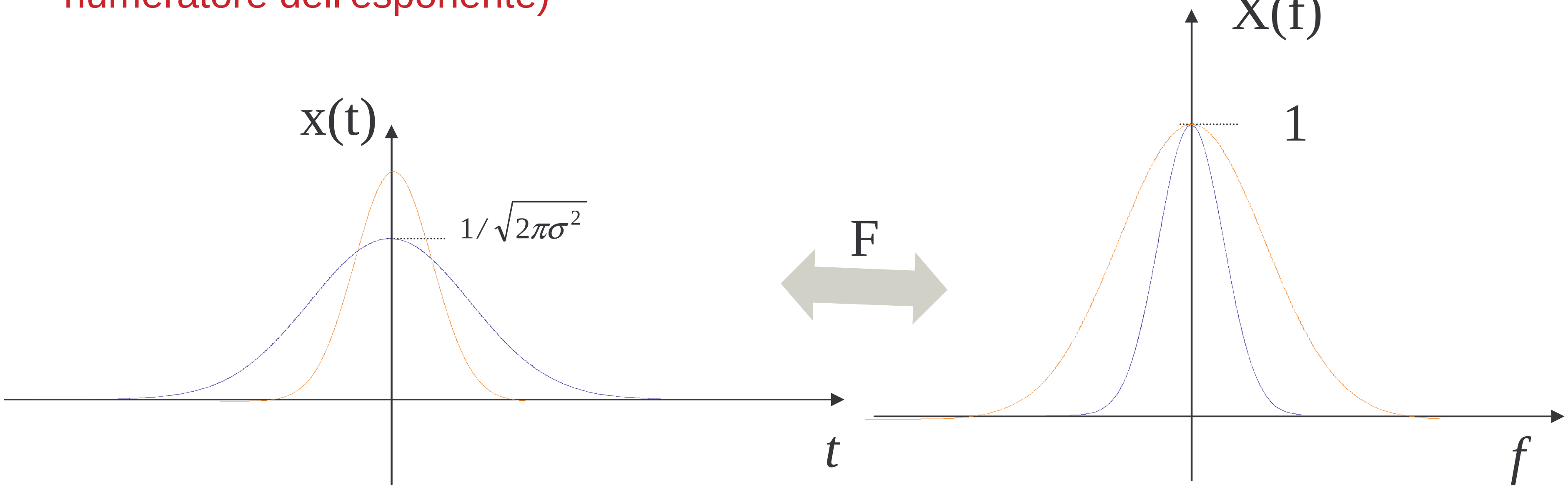
Esempi di trasformata di Fourier (la gaussiana)

$$x(t) = exp\left(-\pi t^2\right) \Leftrightarrow X(f) == exp\left(-\pi f^2\right)$$

Gaussiana di area normalizzata:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\} \Leftrightarrow exp\left\{-2\pi^2\sigma^2 f^2\right\}$$

σ^2 cioè la varianza della Gaussiana, ne gestisce la “larghezza”: all’aumentare di σ^2 si allarga $x(t)$ (σ^2 a denominatore dell’esponente) e si stringe $X(f)$ (σ^2 a numeratore dell’esponente)

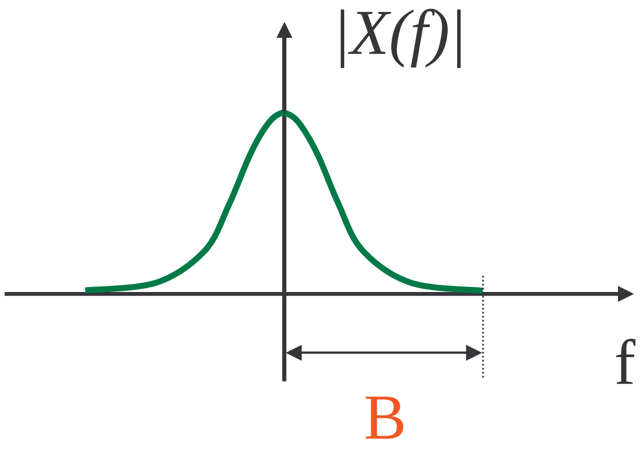


Banda di un segnale

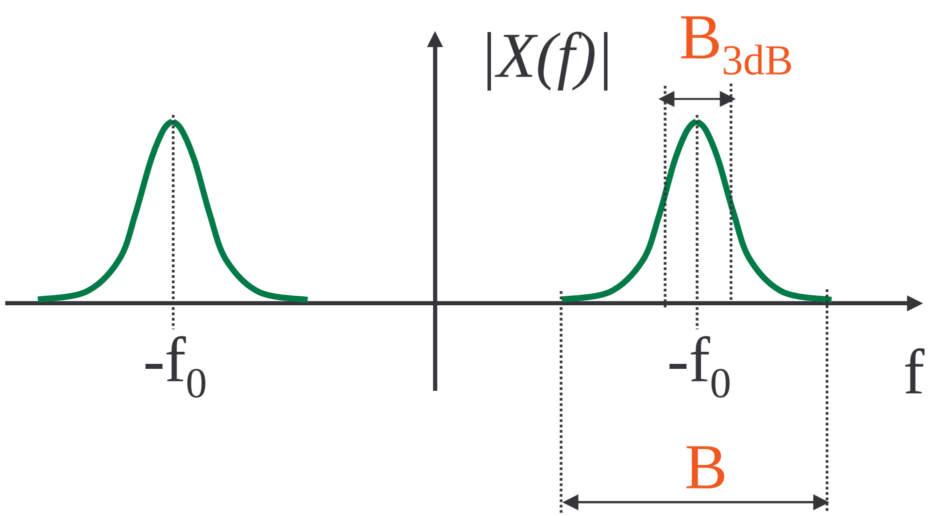
Viene definita **banda (B) del segnale x(t)** l'intervallo di frequenze (misurato sul semiasse positivo) all'interno del quale *X(f)* assume valori diversi da 0.

Operativamente, nella definizione di banda, si considerano due classi di segnali:

Segnali di tipo passa-basso
X(f) concentrata intorno a $f=0$

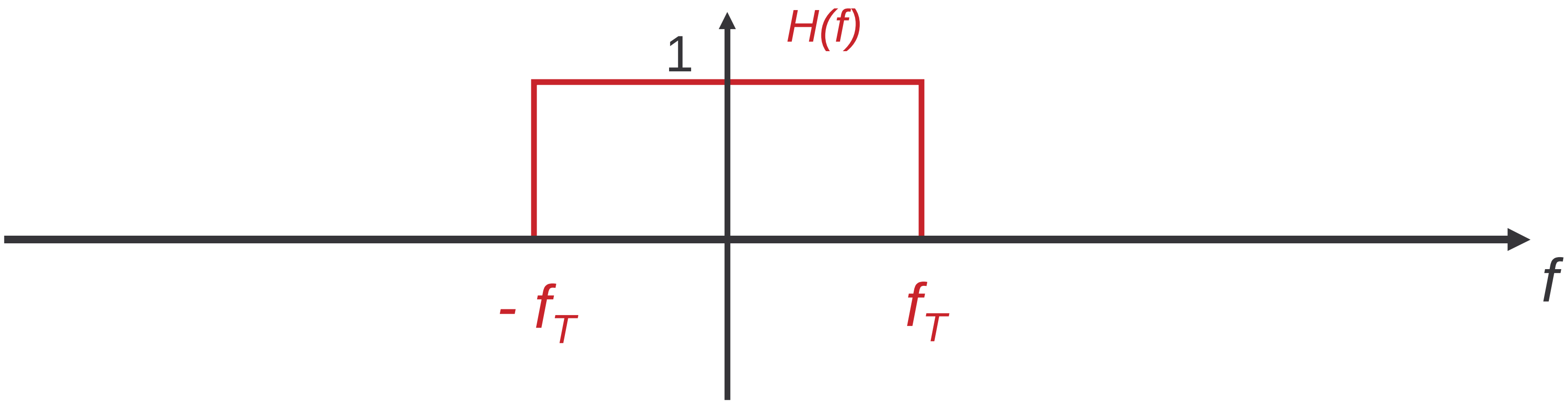


Segnali di tipo passa-banda
X(f) concentrata intorno a $f=\pm f_0$



Molto spesso *X(f)* è a rigore diversa da 0 da $-\infty$ a $+\infty$. In questo caso la banda corrisponde all'intervallo di frequenza in cui *X(f)* è "significativamente" diversa da 0, per esempio $|X(f)|^2>|X|^2_{max}/2$ (Banda a 3 dB) oppure $|X(f)|^2>|X|^2_{max}/10$ (Banda a 10 dB)

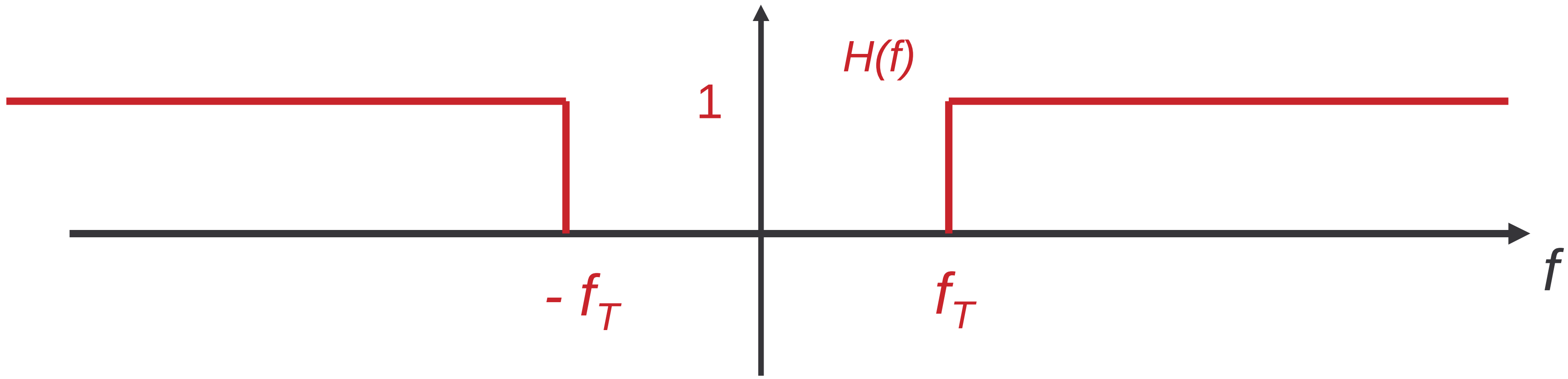
Risposta in frequenza del filtro passa-basso ideale



La risposta all'impulso e' un seno cardinale con gli zeri posizionati a tempi multipli interi di $1/\,2f_T$

$$h(t) = 2f_T\,\mathrm{sinc}(2f_T t) \qquad \Leftrightarrow \qquad H(f) = rect\left(\frac{f}{2f_T}\right)$$

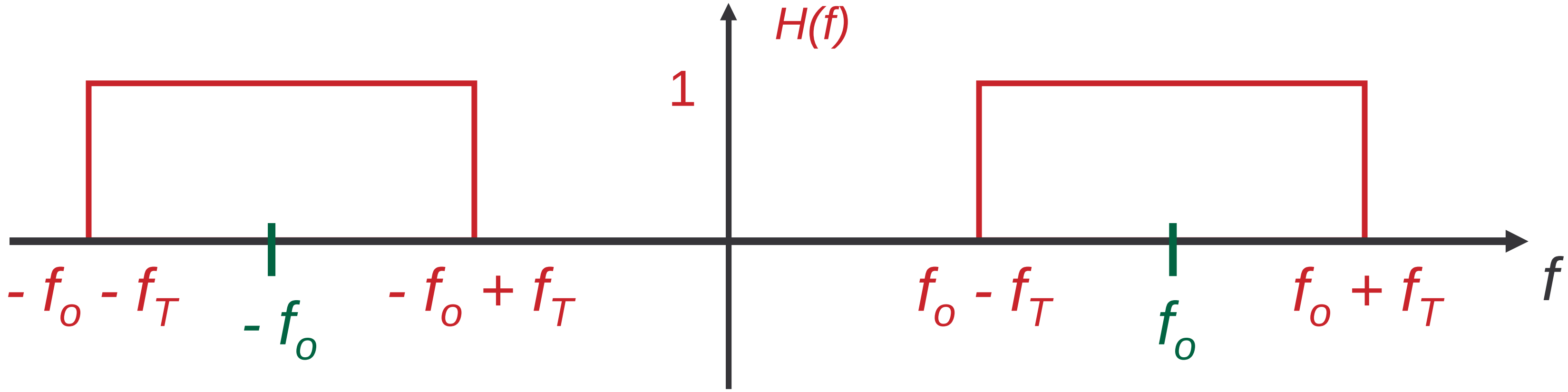
Risposta in frequenza del filtro passa-alto ideale



La risposta all'impulso e' data da un impulso di area unitaria $\delta(t)$ meno un seno cardinale con gli zeri posizionati a tempi multipli interi di $1/2f_T$

$$h(t) = \delta(t) - 2 f_T \,\mathrm{sinc}(2 f_T t) \qquad \Leftrightarrow \qquad H(f) = 1 - rect\left(\frac{f}{2 f_T}\right)$$

Risposta in frequenza del filtro passa-banda ideale



La risposta all'impulso e' quindi data da un seno cardinale con gli zeri posizionati a tempi multipli interi di $1/2f_T$ moltiplicato per $2\cos(2\pi f_0 t)$.

$$h(t) = 4 f_T \cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{sinc}(2 f_T t) \quad \Leftrightarrow \quad H(f) = rect\left(\frac{f - f_0}{2 f_T}\right) + rect\left(\frac{f + f_0}{2 f_T}\right)$$

Esercizi su TDF e LTI (1)

1. Sapendo che $$rect(t) \Leftrightarrow sinc(f)$$

e sfruttando le proprietà della TDF, calcolare le TDF dei seguenti segnali e disegnarne i grafici:

$$x_1(t) = 3\,rect(t/2) \qquad x_2(t) = 5\,sinc(t/4)$$

2.Siano $$s_1(t) = 2\sin(10\pi t), \qquad s_2(t) = \cos(10\pi t) + \sin(20\pi t)$$

Esiste un sistema LTI che a ingresso $s_1(t)$ risponde con uscita $s_2(t)$?
Esiste un sistema LTI che a ingresso $s_2(t)$ risponde con uscita $s_1(t)$?
Per entrambi i casi, se esiste, fornire un esempio di $H(f)$ e $h(t)$.

3. Calcolare l'uscita $y(t)$ di un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$ e ingresso $x(t)$ pari a:

$$h(t) = \delta(t) + \delta(t - 2T) \qquad x(t) = \sin(\pi t/(2T))$$

calcolare prima l'integrale di convoluzione tra x e h, e verificare poi il risultato tramite la risposta in frequenza del sistema.

Esercizi su TDF e LTI (2)

5. Determinare l'uscita $y(t)$ di un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f)$ e ingresso $x(t)$:

$$H(f) = \frac{1}{(1 + j2\pi fT)^6} \qquad x(t) = \cos\left(\frac{t}{T}\right)$$

6. Un sistema LTI ha risposta all'impulso $h(t)$ e ingresso $x(t)$ pari a:

$$h(t) = \frac{1}{2}\, rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \qquad x(t) = rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

calcolare l'uscita $y(t)$ la sua densità spettrale di energia, l'energia e l'energia di $x(t)$.

7. Disegnare le TDF di $\quad x_1(t) = 0.001\,\mathrm{sinc}(t)\cos(2000\pi\, t)$

$$x_2(t) = \mathrm{sinc}(1000t) * rect(250t)$$

8. E' dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = A\, tri\left(\frac{t - T}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

e ingresso $x(t)$ pari a $\quad x(t) = 2\, sen^2(\pi t / T)$. Si può scrivere $x(t)$ come somma di segnali sinusoidali? Determinare l'uscita $y(t)$ e la sua potenza P_y.