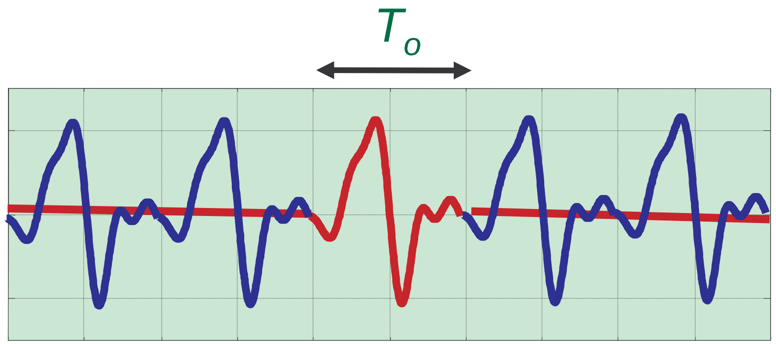
SEGNALI PERIODICI, SEQUENZE, TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER

Rappresentazione dei segnali periodici (1)



x(t) ripetizione periodica di g(t) con periodo T_0**:**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT_0)$$

Un segnale periodico con periodo T_o puo' essere rappresentato come *somma di esponenziali complessi* con **frequenza pari ad un multiplo intero della frequenza fondamentale $f_o=1/T_0$** e con opportuna ampiezza e fase iniziale:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp\{j(2\pi k\, f_o t + \vartheta_k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp\{j\vartheta_k\}\exp\{j2\pi k\, f_o t\}$$

Per maggior compattezza delle formule conviene introdurre il coefficiente complesso

$X_k = A_k \exp\{j\vartheta_k\}$ ottenendo:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \exp\{j2\pi\, k\, f_o t\}}$$

Rappresentazione dei segnali periodici (2)

L'ampiezza A_k e lo sfasamento iniziale ϑ_k degli esponenziali complessi (detti *componenti armoniche*), cioé i coefficienti complessi X_k si trovano con un semplice integrale:

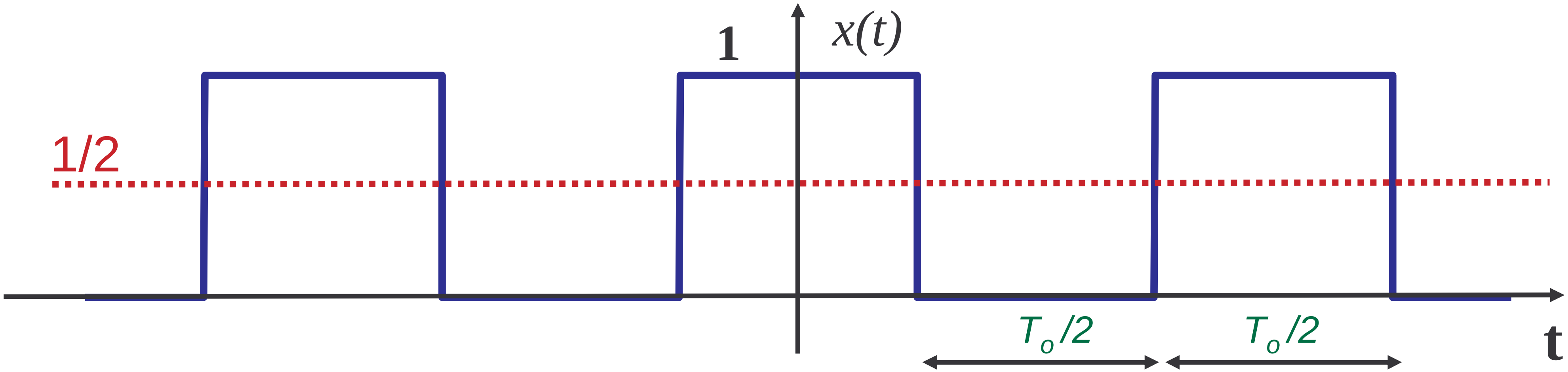
$$X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t) \exp(-j2\pi k f_o t)\, dt$$

Lo sviluppo del segnale periodico nelle sue componenti armoniche viene detto serie di Fourier (gli X_k sono chiamati coefficienti della serie di Fourier).

Poiché g(t), segnale base di x(t), é nullo fuori dall'intervallo $\left(-T_0/2, T_0/2\right)$ gli X_k si possono anche calcolare:

$$X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(-j2\pi k f_o t)\, dt = \frac{1}{T_o} G\left(kf_0\right)$$

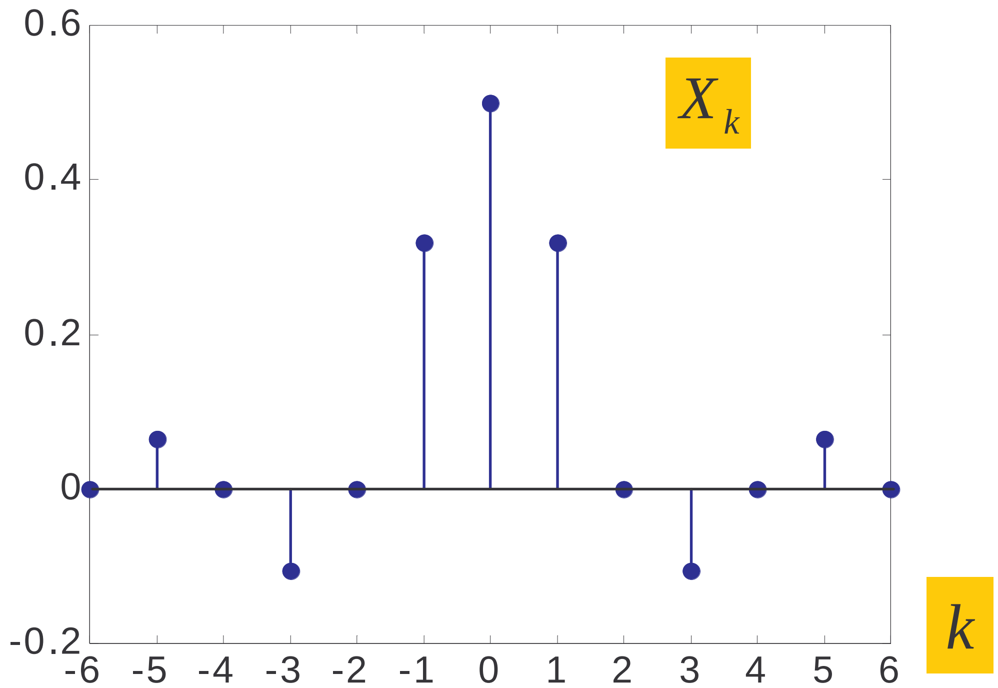
Esempi di espansione in serie di Fourier: l'onda quadra



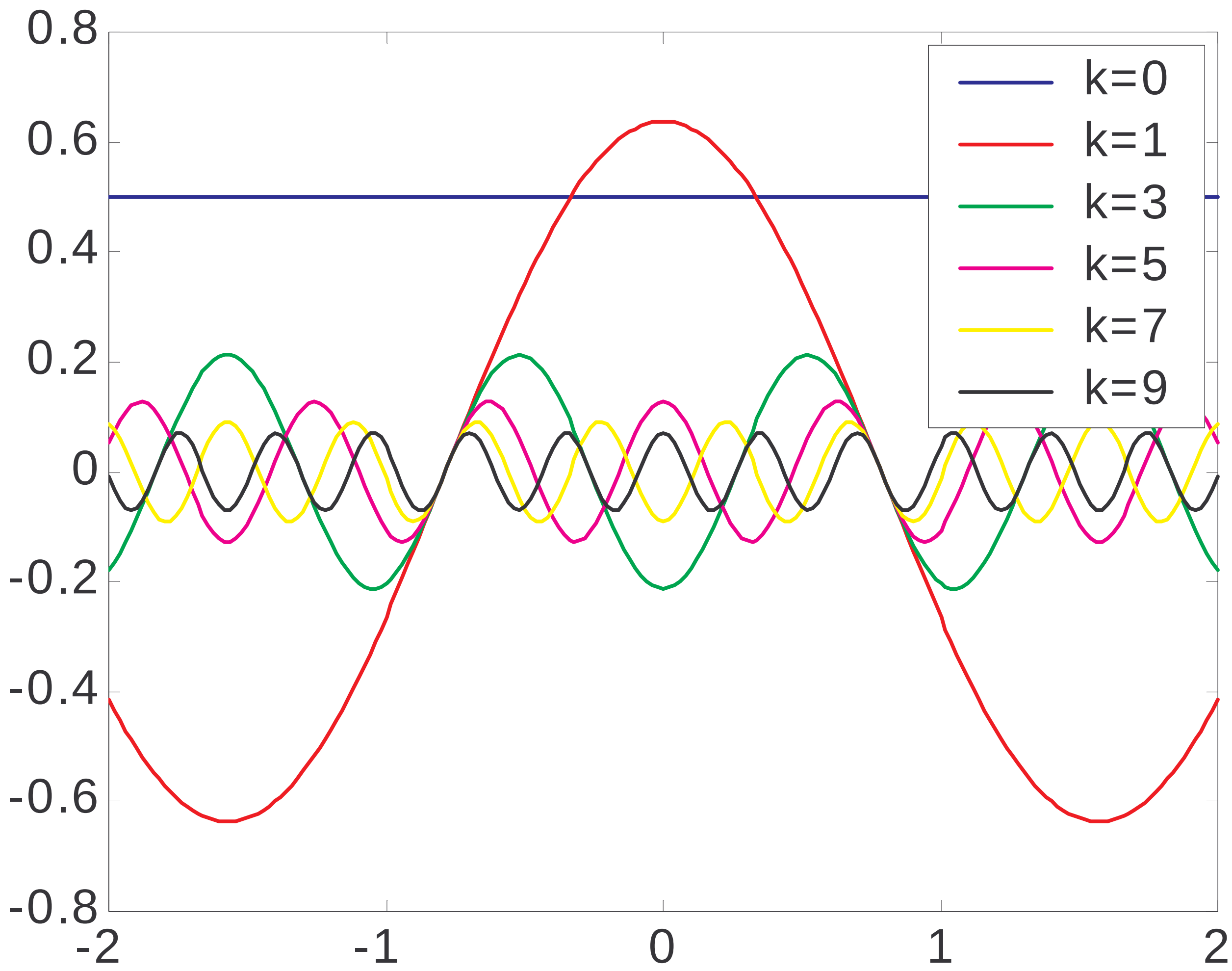
Il segnale base é $g(t)=rect(2t/T_0)$

$$G(f)=(T_0/2)sinc(T_0 f/2)$$

$$X_k=\frac{1}{2}sinc(k/2)=\frac{sin(k\pi/2)}{k\pi}$$

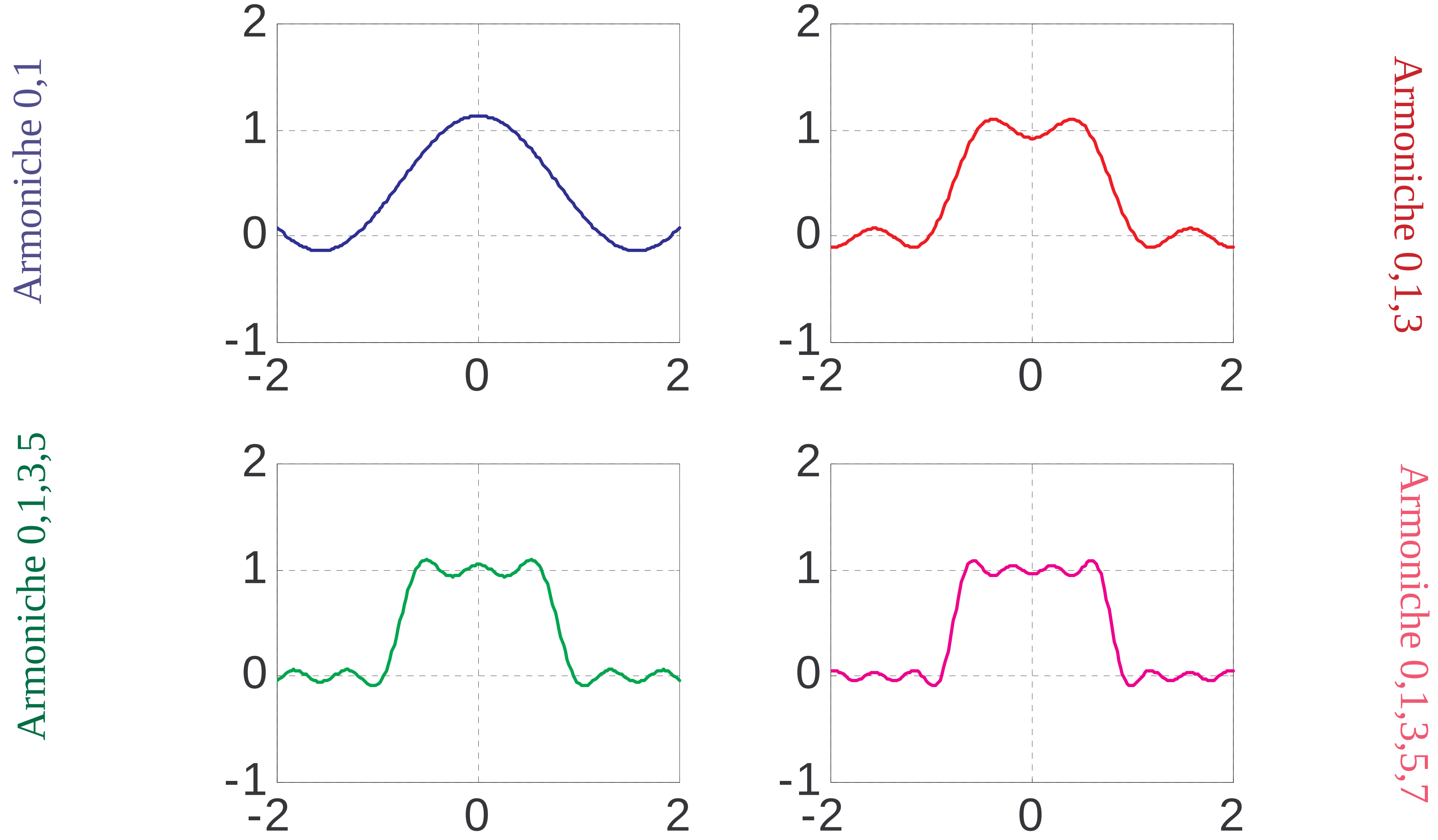


Le prime 10 armoniche dell'onda quadra



$$x(t) = X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}(X_k)\cdot\cos(2\pi k f_0 t) \cancel{- 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}(X_k)\cdot\sin(2\pi k f_0 t)}$$

Espansione parziale in serie di Fourier dell’onda quadra



Trasformata di Fourier di segnali periodici

E’ possibile calcolare la TDF di un segnale periodico? Sfruttando la sua scrittura in serie di Fourier, é possibile, e molto semplice:

$$X(f) = \Im[x(t)] = \Im\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \, exp(j2\pi k f_0 t)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \Im[exp(j2\pi k f_0 t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$$

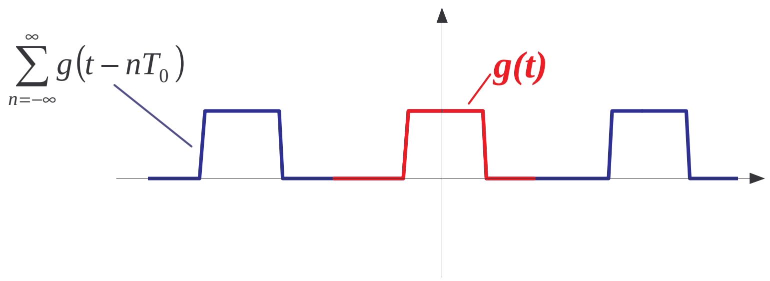
La TDF di un segnale periodico é una sequenza di impulsi di Dirac, spaziati di multipli della frequenza fondamentale (f_0=1/T_0), con pesi pari ai coefficienti della serie di Fourier:

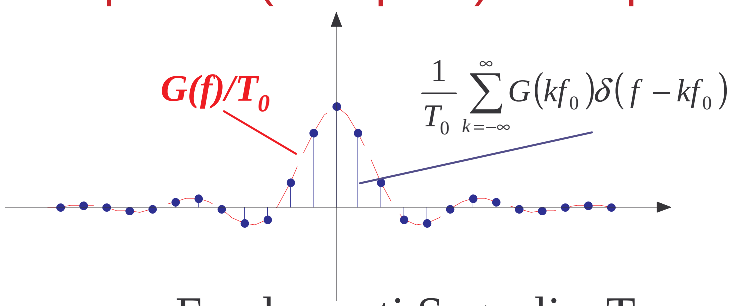
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT_0) \Leftrightarrow \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(kf_0)\delta(f - kf_0)$$

Segnali periodici nel tempo

TDF

Sequenze (di impulsi) in frequenza





Densità spettrale di potenza per segnali periodici

La **densità spettrale di potenza** di un segnale *x(t)* periodico di periodo T_0 è definita come:

$$S_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

Dove gli X_k sono i coefficienti dell'espansione in serie di Fourier.

Infatti...

1 - per i segnali periodici vale:

Parseval per segnali periodici

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df$$

2 - la TDF di x(t) é

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$$

e quindi filtrando passa-banda $x(t)$ intorno a kf_0 si estrae solo $X_k \delta(f - kf_0)$ la cui potenza vale $|X_k|^2$ (potenza di un esponenziale complesso = potenza di una costante)

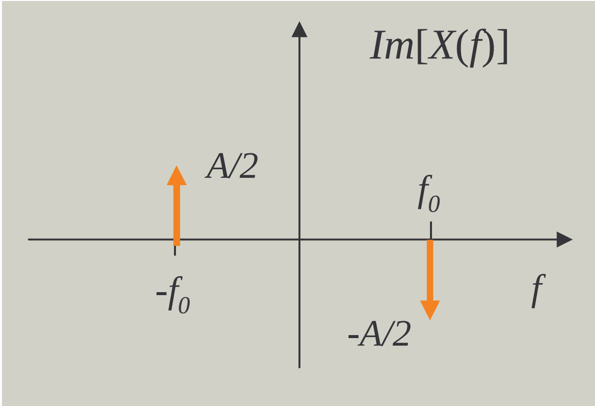
Esempi e conseguenze

Sinusoide:

$$x(t) = A\sin(2\pi f_o t) \quad \Rightarrow \quad S_x(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f + f_o) + \frac{A^2}{4}\delta(f - f_o)$$

$$\Rightarrow \quad P_x = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$$

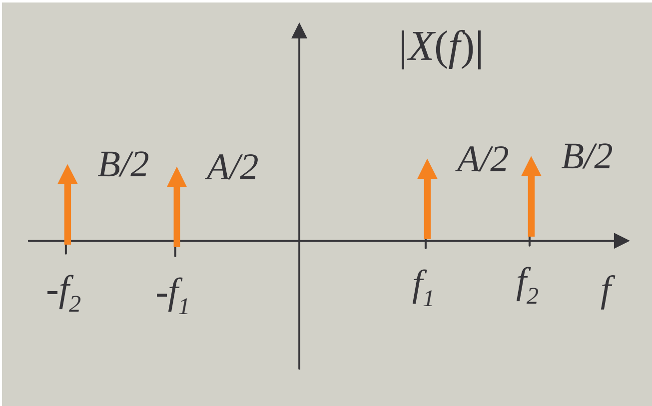
OK!



La somma di due segnali periodici senza righe nella stessa frequenza ha un potenza data dalla somma delle potenze

$$x(t) = A\sin(2\pi f_1 t) + B\cos(2\pi f_2 t)$$

se $\quad f_1 \neq f_2 \quad \Rightarrow \quad P_y = \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}$



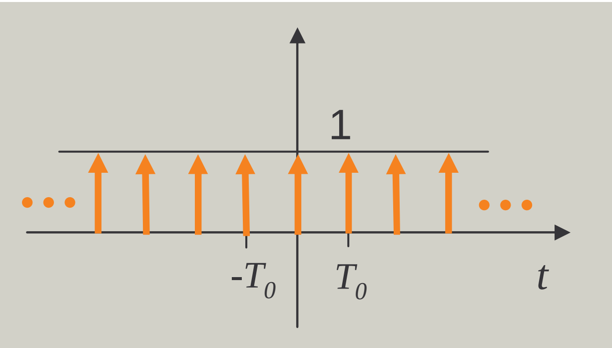
Segnali periodici: treno di impulsi

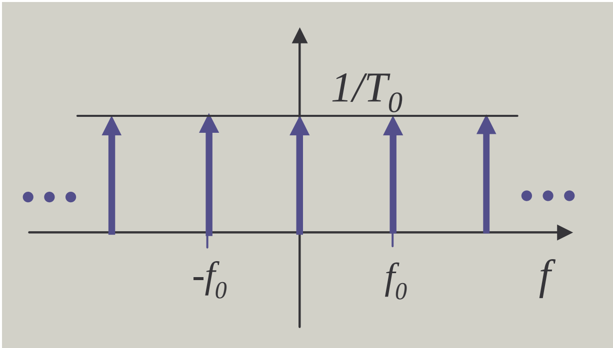
Un treno di impulsi di ampiezza unitaria, spaziati di T_0 costituiscono un particolare segnale periodico

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \qquad g(t) = \delta(t), \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT_0)$$

La TDF del segnale base é la costante unitaria: $G(f) = 1$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \Leftrightarrow \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_0)$$



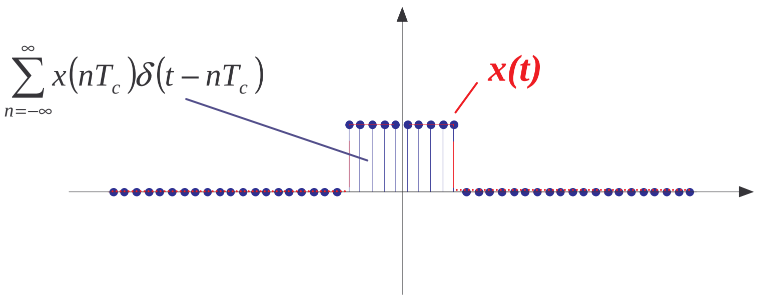


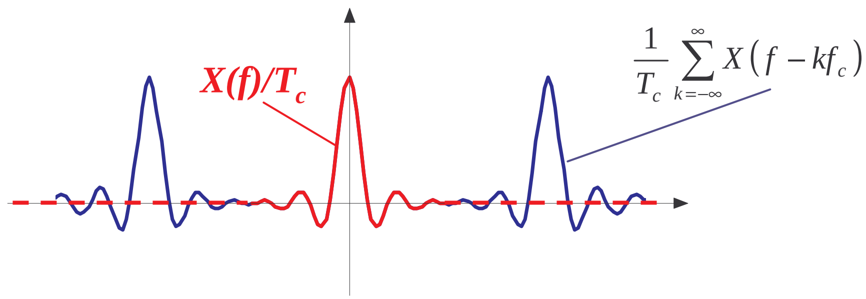
Trasformata di Fourier di sequenze

Per dualità, se consideriamo una sequenza di impulsi pesati con un segnale discreto x_n ottenuto p.e. campionando un segnale continuo $x(t)$ con passo T_c, ci aspettiamo che la sua TDF sia periodica in frequenza, di “periodo” $f_c = 1/T_c$. Infatti:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - nT_c) \Leftrightarrow \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_c)$$

Sequenze (di impulsi) nel tempo TDF Segnali periodici in frequenza





dim: se $x(t) \Leftrightarrow X(f)$, si ha:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\,\delta(t - nT_c) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c) \Leftrightarrow X(f) * \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_c) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_c)$$

Dualità tra serie di Fourier e segnali campionati

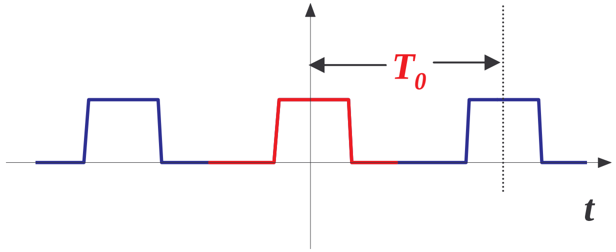
E’ interessante osservare che dal punto di vista matematico serie di Fourier e campionamento sono del tutto equivalenti (è un esempio notevole di dualità). Nel primo caso la forma d’onda nel tempo é periodica (ripetizione di un periodo della forma d’onda) e la trasformata di Fourier è discreta (campionata). Nel secondo caso é campionato il segnale ed è periodica la trasformata di Fourier (ripetizione della trasformata del segnale).

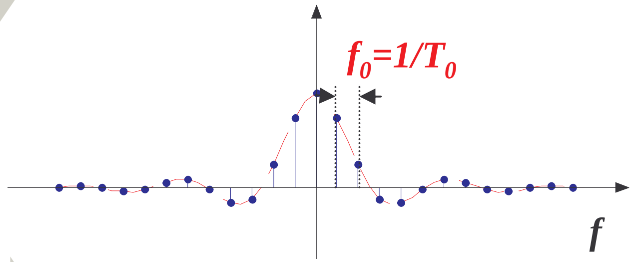
Dal punto di vista delle applicazioni serie di Fourier e campionamento sono invece profondamente diversi, perché da un punto di vista fisico tempo e frequenza sono ben distinti. Mentre una sequenza discreta di campioni è quasi sempre un “segnale” (che porta informazione ad un destinatario) spesso una forma d’onda periodica non è un vero segnale (visto un periodo non c’e’ altro di interessante da aspettarsi!).

Dominio del tempo

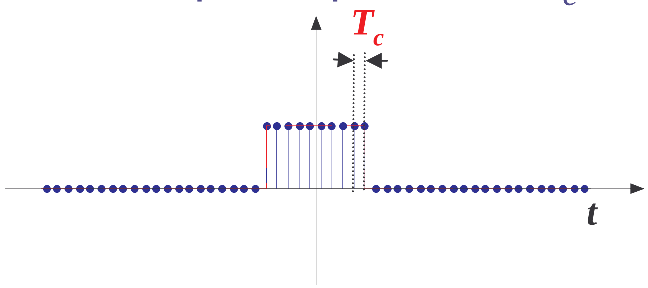
Dominio delle frequenze

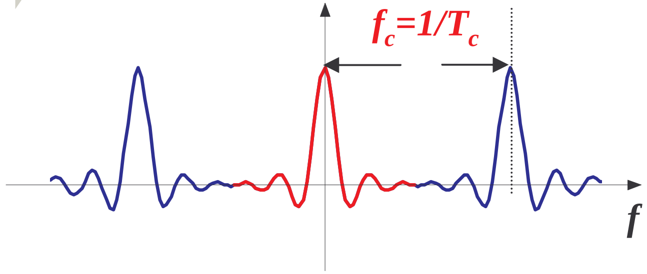
Segnali periodici di periodo T_0 **TDF** → Sequenze di impulsi spaziati di $f_0=1/T_0$





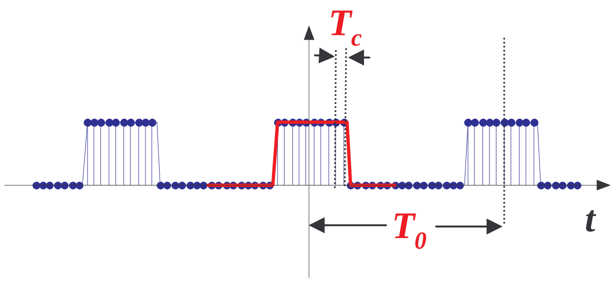
Sequenze di impulsi spaziati di T_c **TDF** → Segnali periodici di “periodo” $f_c=1/T_c$

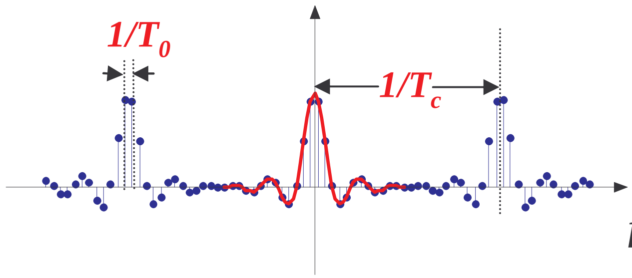




Si deduce che la TDF di una sequenza periodica é anch’essa una sequenza periodica:

Sequenze di impulsi spaziati di T_c periodiche di periodo T_0 **TDF** → Sequenze di impulsi spaziati di $f_0=1/T_0$ periodiche di “periodo” $f_c=1/T_c$



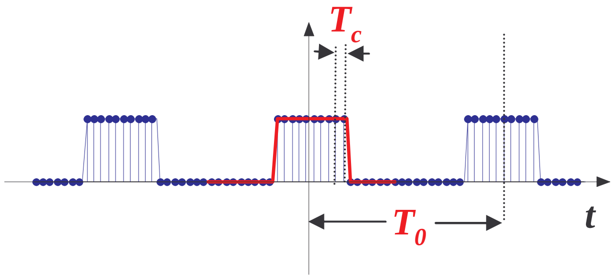


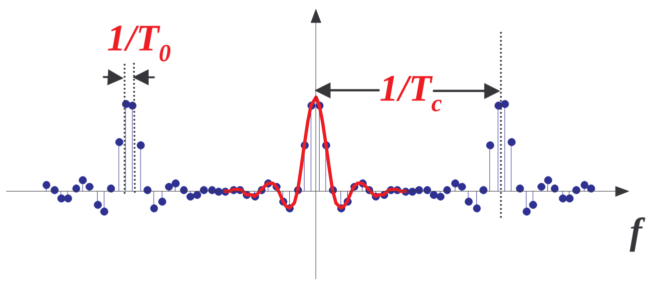
Trasformata di Fourier di una sequenza periodica

Una sequenza di impulsi spaziati nel tempo di T_c, periodica di periodo $T_0=NT_c$ con sequenza dei pesi x_n (periodica di periodo N), ha trasformata di Fourier "periodica" di periodo f_c, del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t-nT_c) \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f-kf_0)$$

quindi anche la sequenza X_k é periodica di periodo N, perchè $f_c/f_0=N$.





Si può dimostrare che tra le sequenze x_n e X_k (per le quali si può limitare l'osservazione ad un solo periodo) vale la doppia relazione di tipo "discreto":

$$X_k = \frac{1}{T_0}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} \qquad x_n = T_c \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$$

Si noti che a parte i coefficienti moltiplicativi, tali relazioni non dipendono direttamente da T_0 e T_c ma solo dal loro rapporto $N = T_0/T_c$.

Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

La sequenza $\tilde{X}_k = T_0 X_k$ prende il nome di Trasformata Discreta di Fourier (DFT) della sequenza x_n

$$DFT[x_n]: \quad \tilde{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$$

La formula di antitrasformazione (Trasformata Discreta di Fourier Inversa, IDFT), essendo $T_c/T_0=1/N$, risulta

$$IDFT\left[\tilde{X}_k\right]: \quad x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_k e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$$

Tutti i *tool* di elaborazione numerica includono tali operazioni. Noi le useremo per il calcolo numerico delle TDF, in quanto

$$\left.\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt\right|_{f=kf_0} \cong \left.\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) e^{-j2\pi fnT_c} T_c\right|_{f=kf_0} \cong T_c \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_c) e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} = T_c DFT\left[x(nT_c)\right]$$