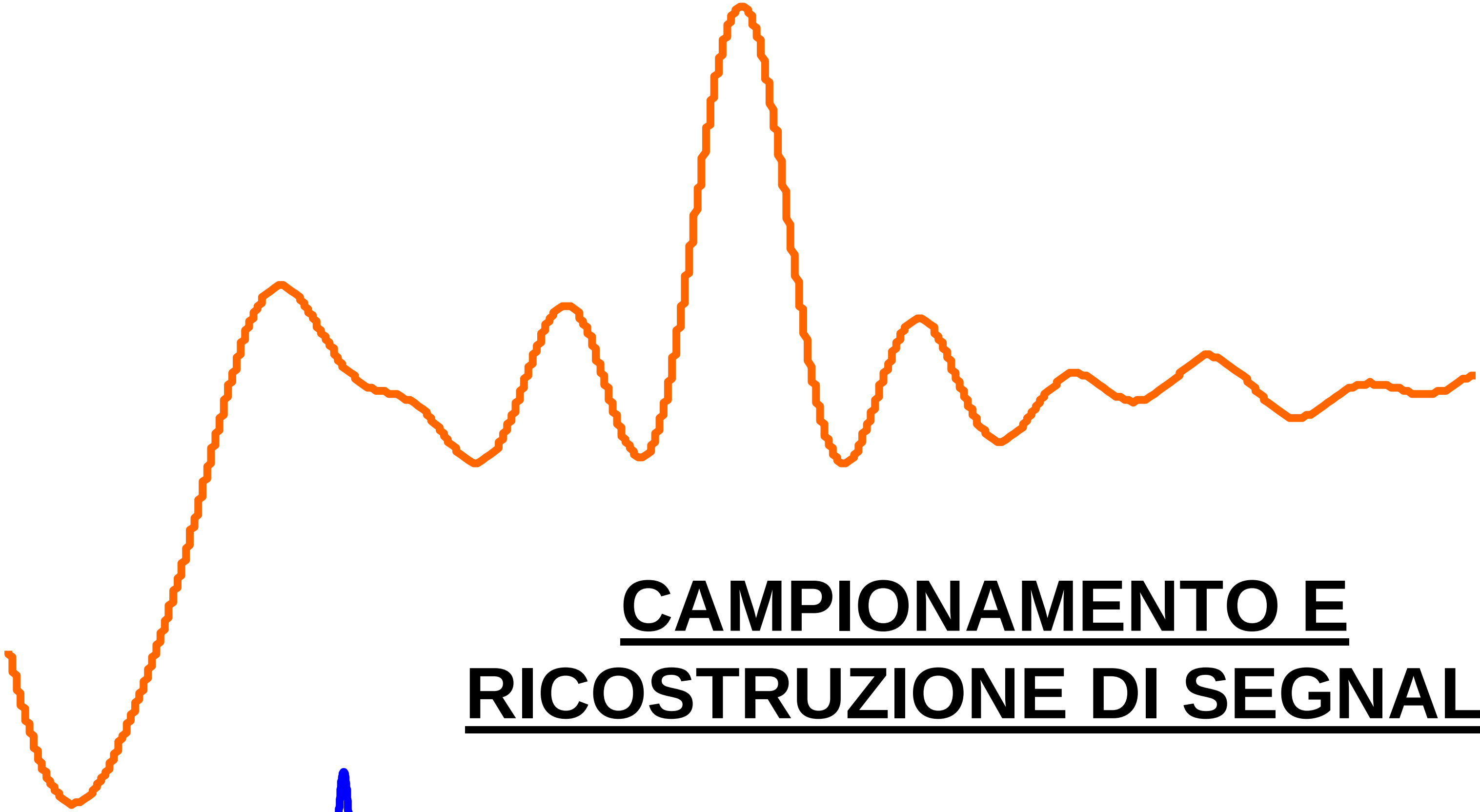
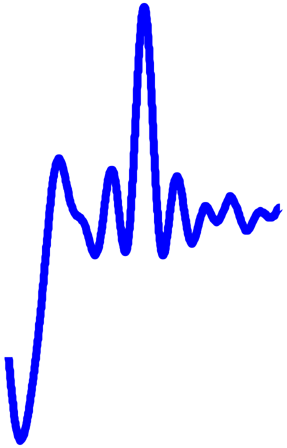


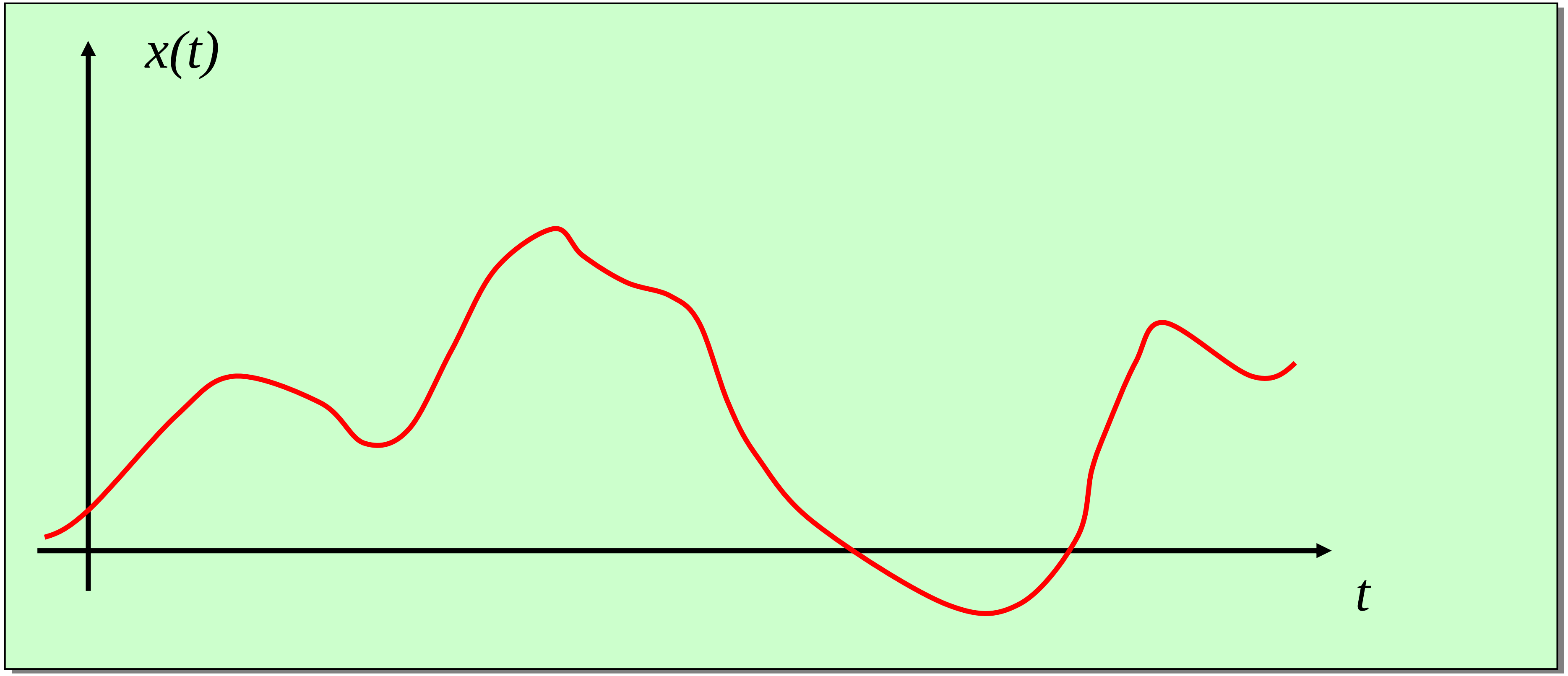
CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE DI SEGNALI



Numerizzazione dei segnali

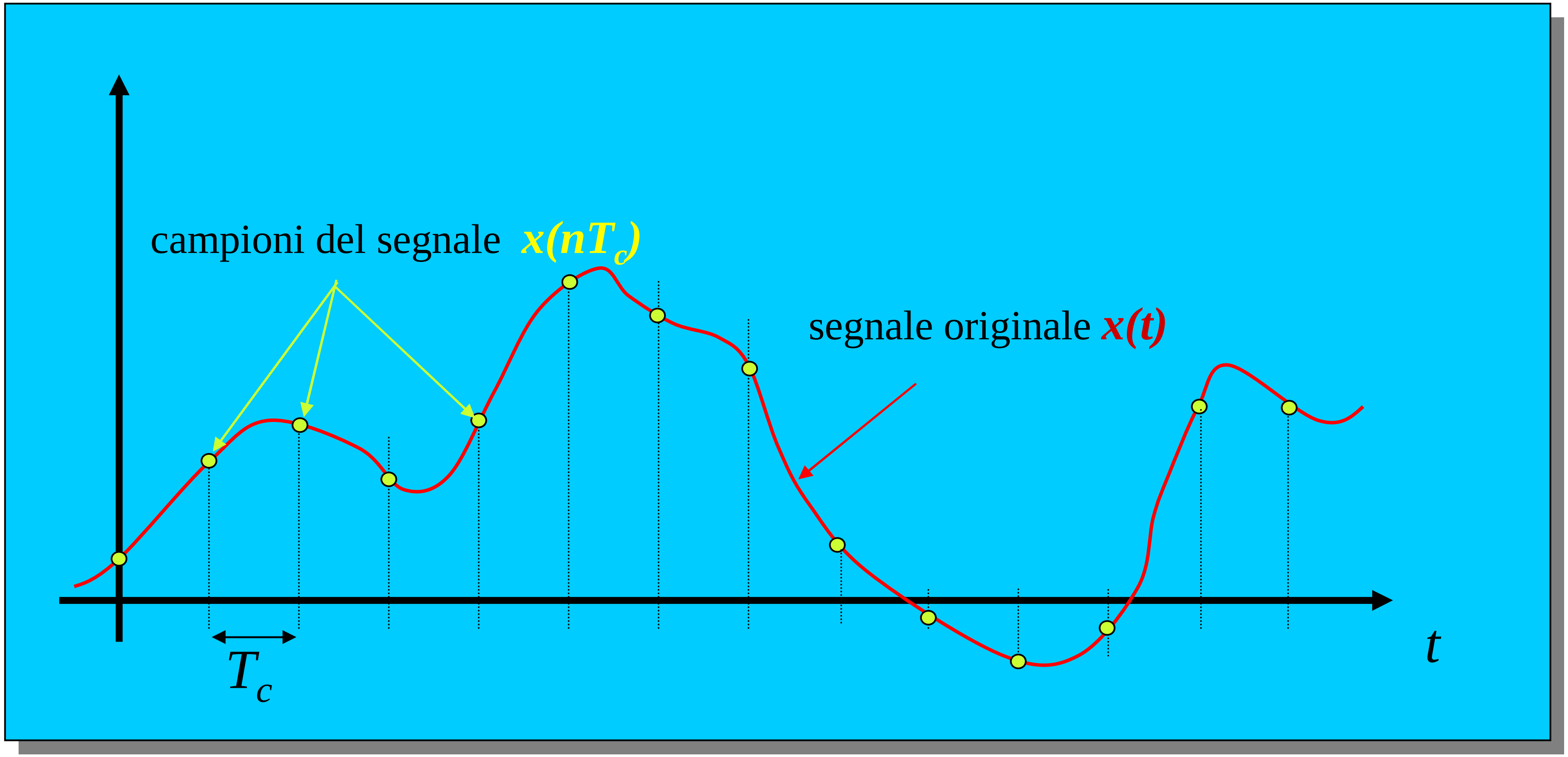
- Nei moderni sistemi di memorizzazione e trasmissione i segnali in ingresso sono di tipo **numerico,** normalmente rappresentati in **formato binario {0,1}**.
- In alcuni casi (si pensi ad esempio alle informazioni sulle operazione valutarie che le banche si scambiano fra loro) i segnali da elaborare e trasmettere sono segnali **numerici** già **all'origine** (la sorgente stessa è numerica).
- In alcuni casi la rappresentazione numerica dei segnali originari e' molto semplice (alle lettere di un testo può essere facilmente associato un codice numerico ad es. binario: *a = 00001, b = 00010, c = 00011*, ecc.).
- In molti altri casi, invece, la rappresentazione numerica dei segnali originari richiede un'analisi più accurata. Come si può, ad esempio, rappresentare numericamente il segnale tempo-continuo in uscita da un microfono?

Molti dei segnali con cui abbiamo a che fare nella realtà quotidiana sono continui sia nel tempo sia nelle ampiezze.



La rappresentazione di un segnale **continuo** con un segnale **numerico** richiede di discretizzare sia il tempo sia le ampiezze.

Campionare i segnali (discretizzare nel tempo)



• T_c è detto **periodo (o passo) di campionamento,** $f_c = 1/T_c$ è detta **frequenza di campionamento**

• é evidente che segnali $x(t)$ diversi, possono dare la stessa sequenza di campioni...

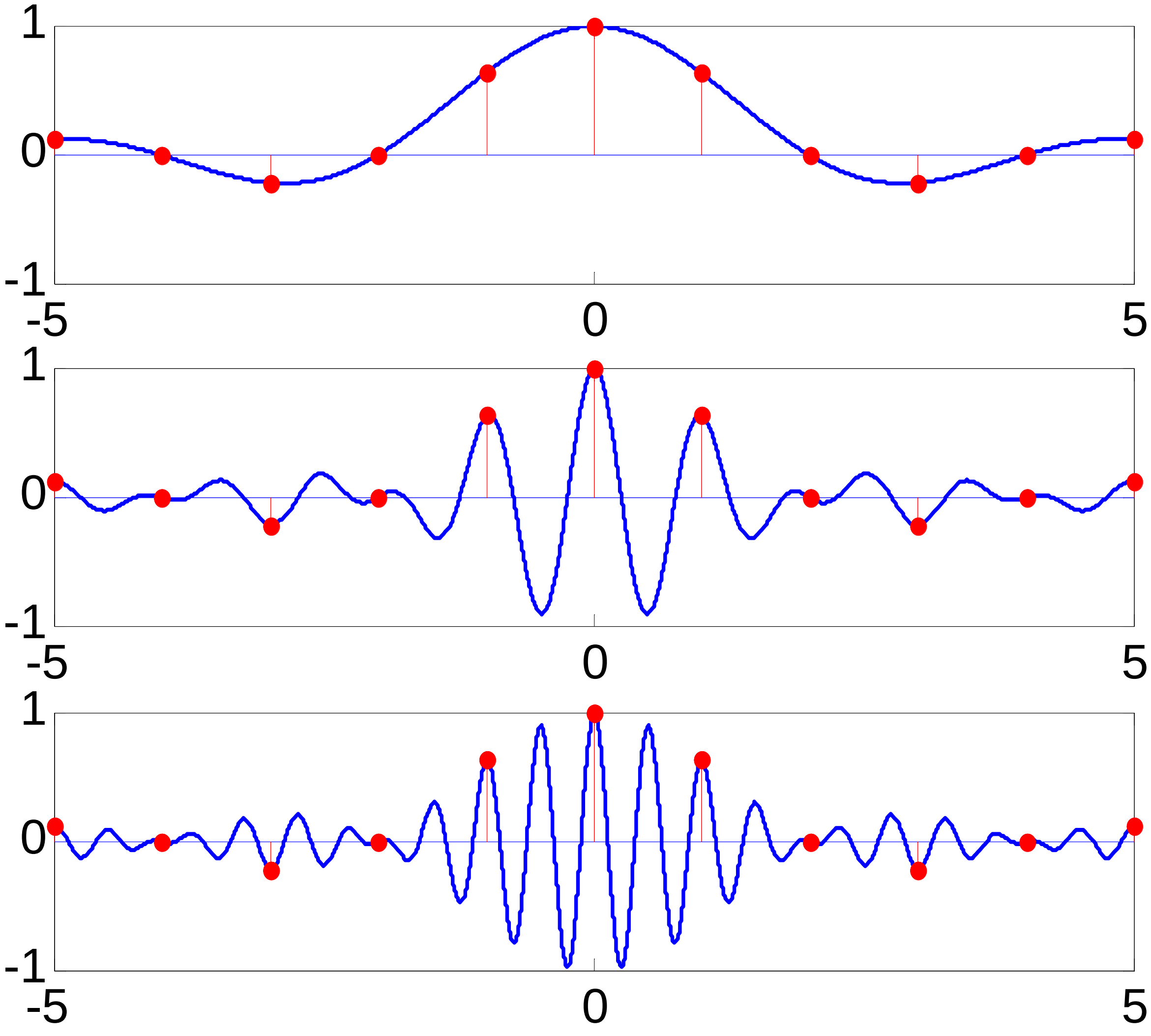
Ambiguita' causata dal campionamento (esempio)

$$\boxed{x(t) = sinc(t/2)}$$

$$\boxed{T_c = 1} \qquad \boxed{f_c = 1}$$

$$\boxed{x_1(t) = x(t)\cos(2\pi t)}$$

$$\boxed{x_2(t) = x(t)\cos(4\pi t)}$$



Ambiguità causata dal campionamento

Consideriamo il generico segnale *x(t)* e campioniamolo a passo $T_c = 1/f_c$, ottenendo la sequenza di campioni $x(nT_c)$. La sequenza che otteniamo possiamo rappresentarla nel dominio continuo tramite il prodotto tra x(t) ed il treno di impulsi spaziati di T_c secondi:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\,\delta(t - nT_c) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad X_c(f) = X(f) * \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_c) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_c)$$

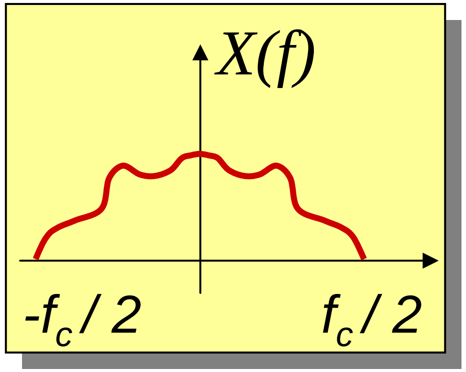
<u>In generale</u>, tanti diversi x(t) generano la stessa $x_c(t)$ per cui non è possibile ricostruire x a partire da x_c. Quest’ambiguità si ritrova anche in $X_c(f)$: non e’ possibile ricostruire com’era fatta X(f) dalla sovrapposizione delle sue repliche traslate $X_c(f)$.

Il teorema del campionamento

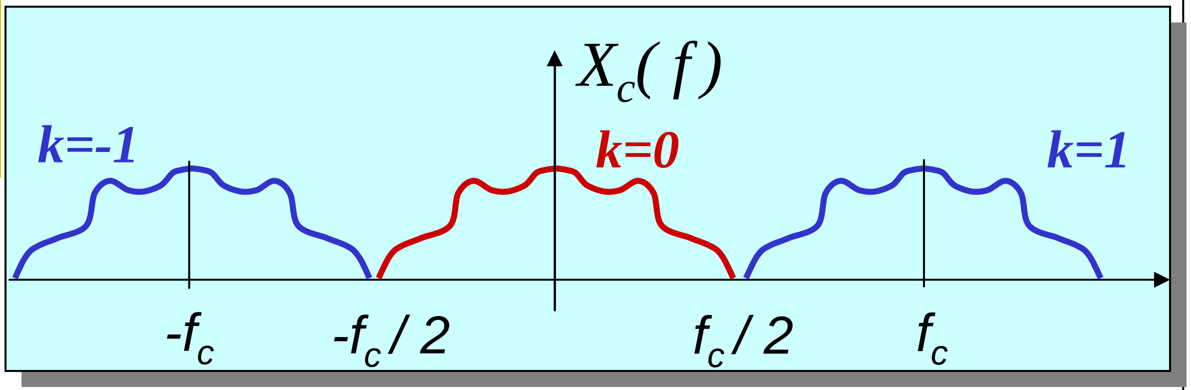
Se e' noto a priori che il segnale tempo continuo $x(t)$ non contiene frequenze maggiori di $f_c / 2$ e inferiori a $-f_c / 2$, esiste un legame univoco tra il segnale continuo nel tempo e i suoi campioni $x(nT_c)$.

Se un segnale $x(t)$ e' campionato con frequenza di campionamento f_c almeno doppia della massima frequenza contenuta e' perfettamente ricostruibile (*le repliche in frequenza sono disgiunte*). Altrimenti le repliche sono sovrapposte e vi sono frequenze alle quali non e' possibile distinguere tra repliche diverse.

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f)$$



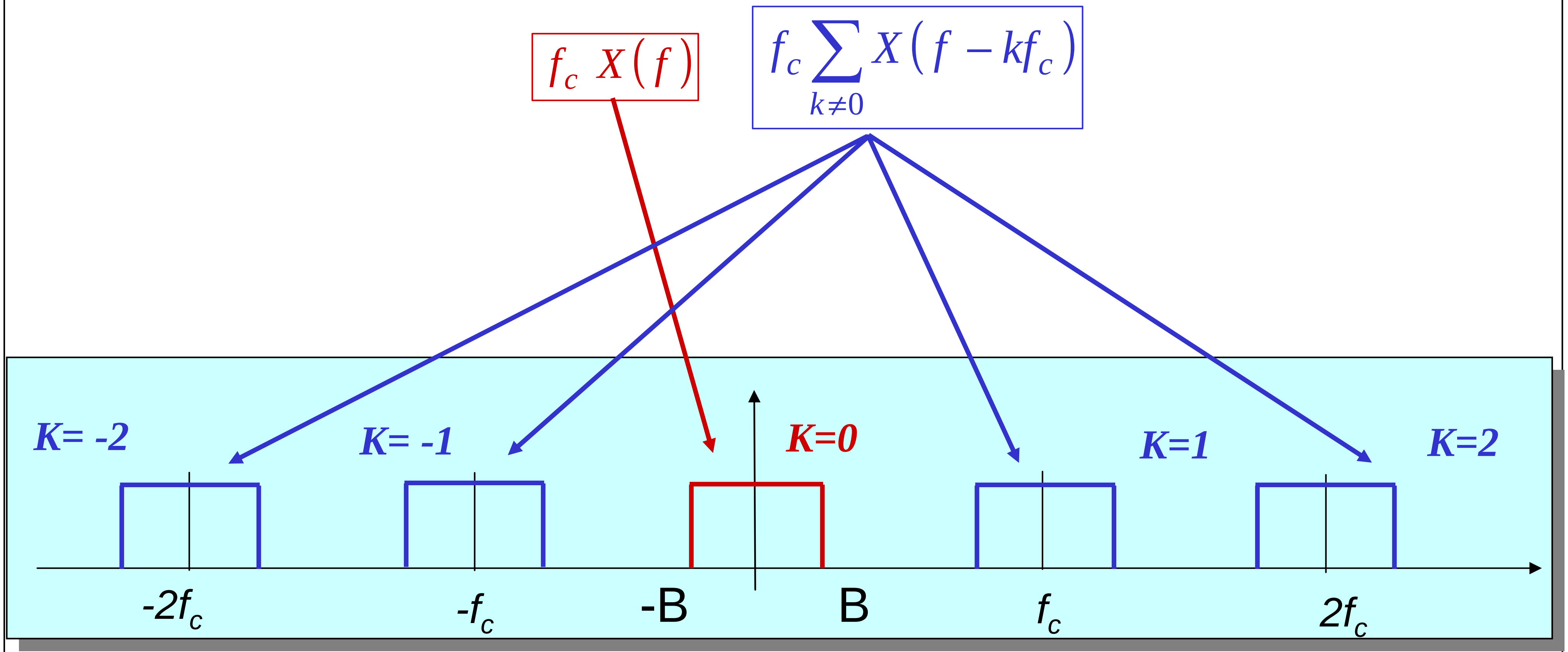
$$x_c(t) \xrightarrow{TF} f_c \sum_k X(f - kf_c)$$



Il contenuto in frequenza del segnale campionato

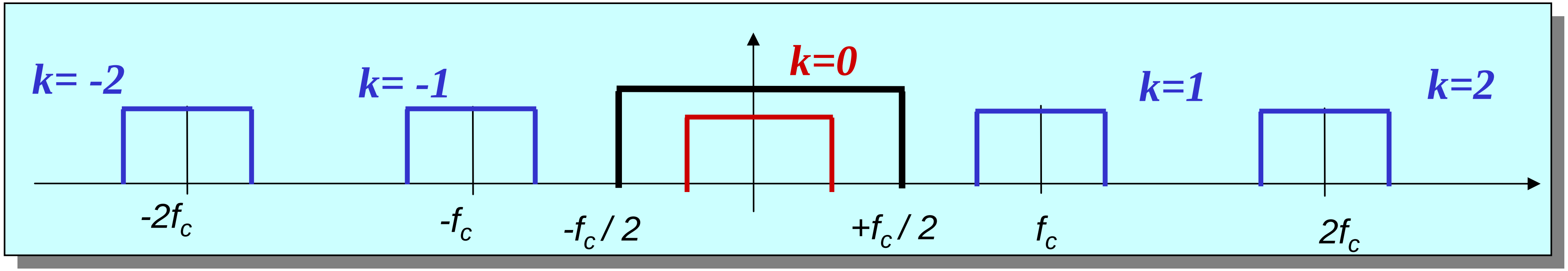
Riprendiamo l'esempio precedente: $\boxed{x(t) = sinc(t/2) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = 2rect(2f)}$

Se $f_c > 2B$, il contenuto in frequenza del segnale $x_c(t)$ è



La ricostruzione del segnale tempo-continuo (1)

Per la ricostruzione, lasciamoci ispirare di nuovo dall'analisi nel campo delle frequenze. Volendo recuperare X(f) da $X_c(f)$ si può usare un filtro passa-basso ideale (o per lo meno con fase lineare) con banda compresa tra $-f_c / 2$ e $+f_c / 2$, e guadagno $1/f_c = T_c$

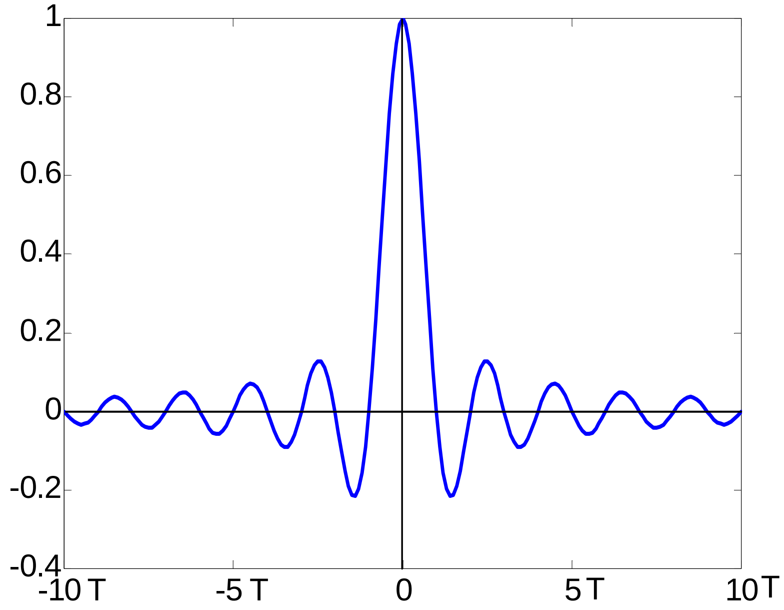


La sua risposta impulsiva é un seno cardinale di ampiezza unitaria:

$$H(f) = T_c \, rect(T_c f) \xrightarrow{\mathfrak{I}^{-1}} h(t) = \cancel{f_c}\cancel{T_c} \operatorname{sinc}(f_c t)$$

x(t) si può quindi ricostruire tramite convoluzione tra la sequenza di impulsi $x_c(t)$ e h(t):

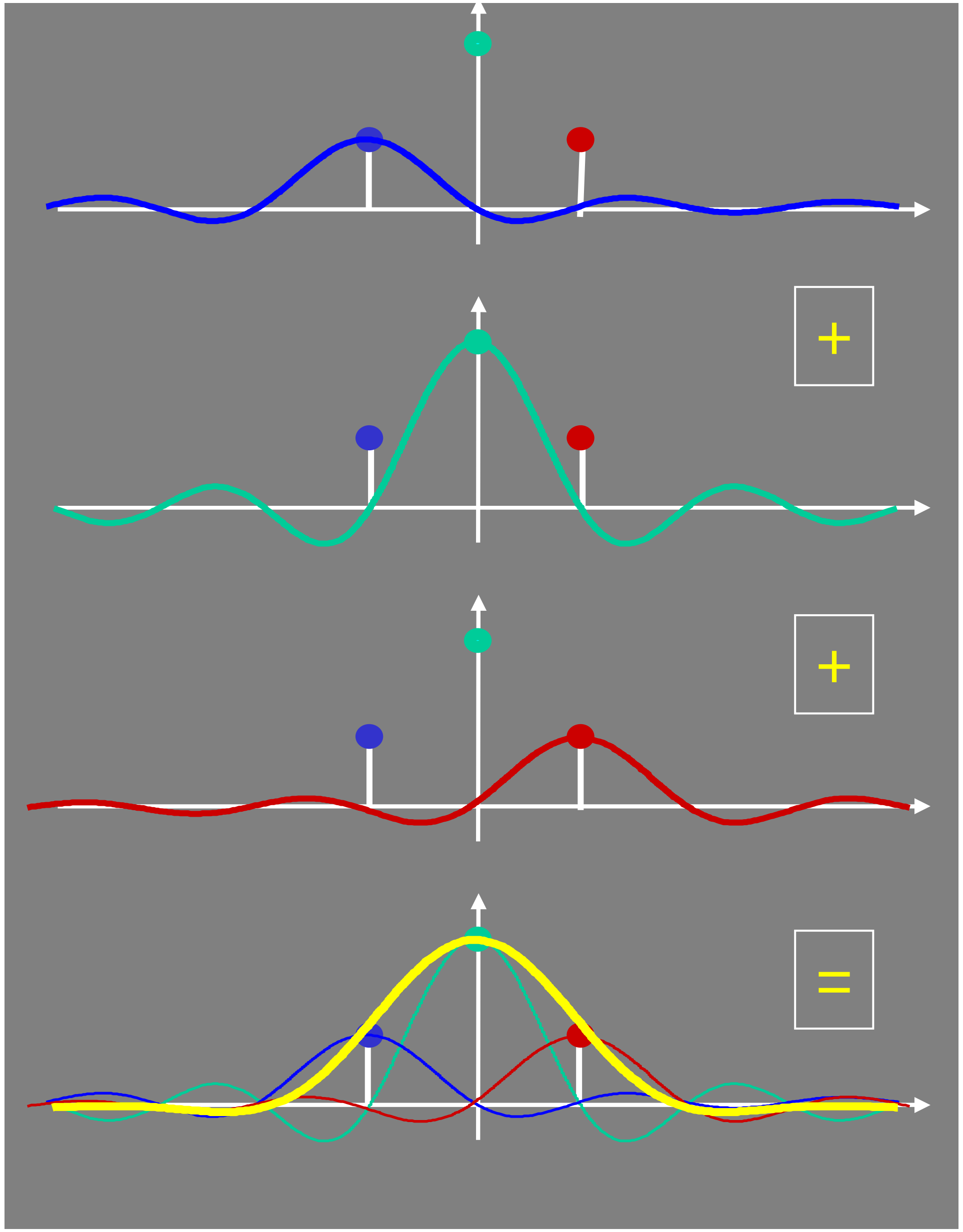
$$x_c(t) * h(t) = x(t)$$



La ricostruzione del segnale tempo-continuo (2)

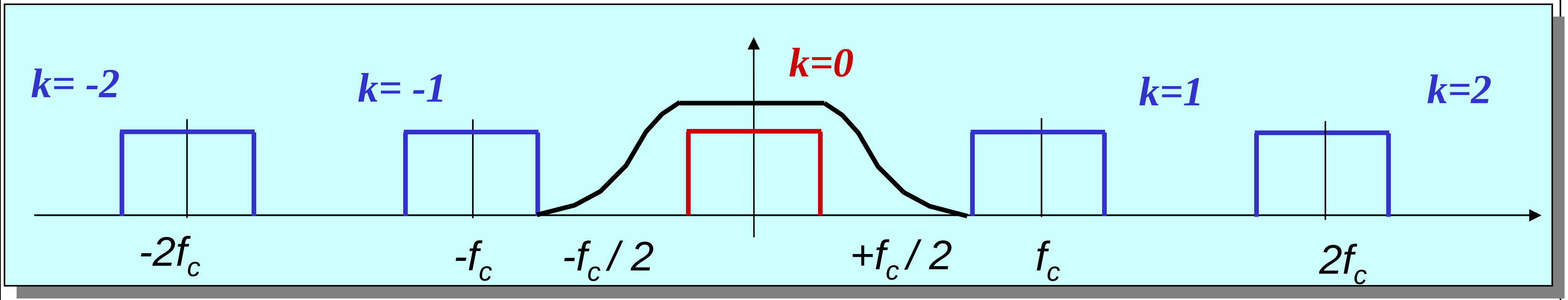
Operativamente non occorre nemmeno passare attraverso un segnale impulsivo (che é sempre un'astrazione). Avendo a disposizione i campioni *$x(nT_c)$* basta sommare seni cardinali centrati ai tempi *nT_c*, corrispondenti al filtro LP ideale, con ampiezze *$x(nT_c)$*:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_c}{T_c}\right) = x(t)$$



Notate che ogni seno cardinale ha ampiezza unitaria nell'istante in cui é centrato ed è nullo in ogni altro istante in kT_c, per tanto in nT_c il segnale ricostruito ha esattamente ampiezza $x(nT_c)$

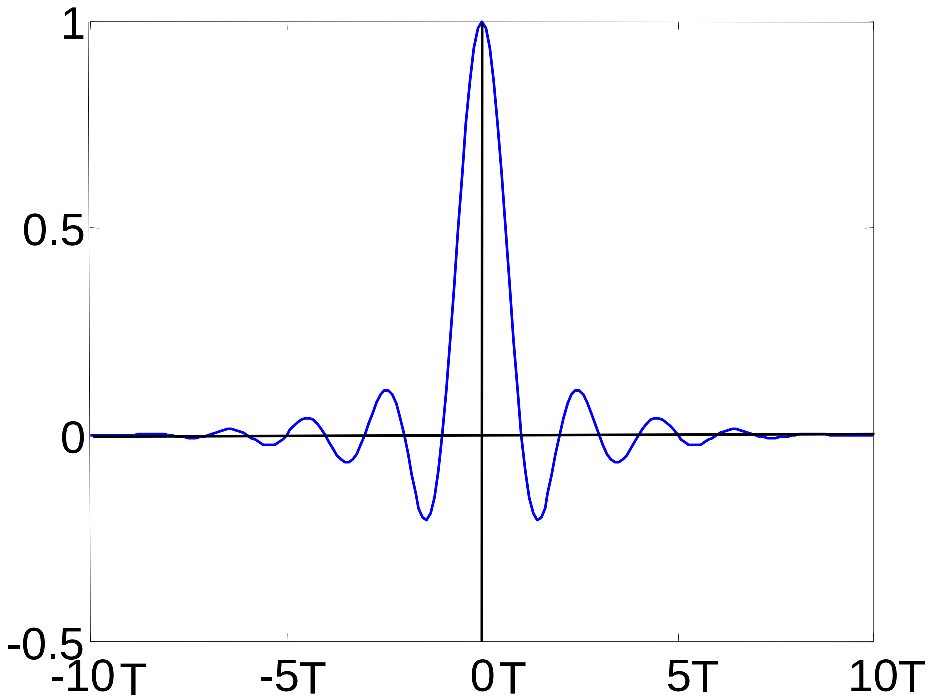
La ricostruzione del segnale tempo-continuo (3)



Se la <u>frequenza di campionamento</u> f_c e' <u>maggiore del doppio della massima frequenza del segnale</u> il filtro di ricostruzione passa-basso puo' avere transizioni piu' "morbide".

La risposta all'impulso non e' un seno cardinale (di durata infinita e <u>non realizzabile</u>), e puo' avere durata praticamente finita.

In pratica <u>si deve sempre campionare ad una frequenza un po' maggiore del doppio della frequenza massima</u> contenuta nel segnale.



Prefiltraggio del segnale (filtro *anti-aliasing*)

Se non si è certi che la banda del segnale sia limitata ad un valore B (sulla base del quale si intende scegliere la frequenza di campionamento) è necessario “prefiltrare” il segnale (cioè filtrarlo prima del campionamento).

MEGLIO PERDERE SUBITO COMPONENTI IN FREQUENZA CHE NON SI E’ IN GRADO DI RAPPRESENTARE IN MODO NON AMBIGUO, PIUTTOSTO CHE RITROVARSELE CONVERTITE AD UNA DIVERSA FREQUENZA DALLE OPERAZIONI DI CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE (ERRORE DA SPETTRO ADIACENTE).

Il “prefiltro” (filtro *anti-aliasing*) ha caratteristiche molto simili al filtro di ricostruzione (talvolta e’ uguale, per utilizzare due volte un unico progetto).

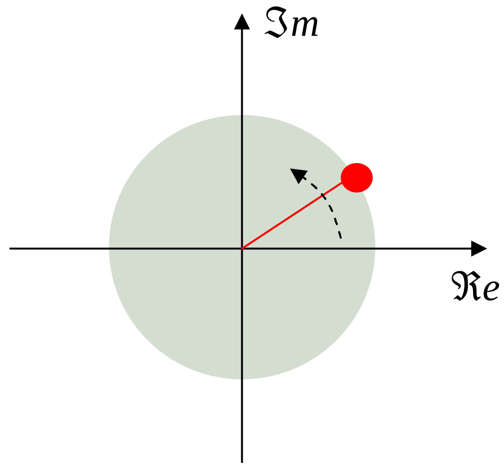
Esempi: nel CD audio si prefiltra il segnale musicale in modo che abbia banda B = 20 kHz (largamente sufficiente per una ottima qualità) e poi si campiona a frequenza f_c = 44.1 kHz. Invece il segnale telefonico viene spesso campionato alla frequenza f_c = 8 kHz. In questo caso il prefiltro ha banda B < 4 kHz (se trasmettete musica non aspettatevi alta fedeltà).

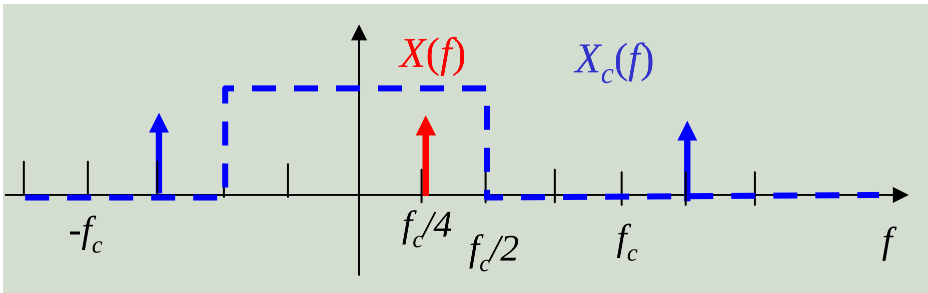
Esempio:

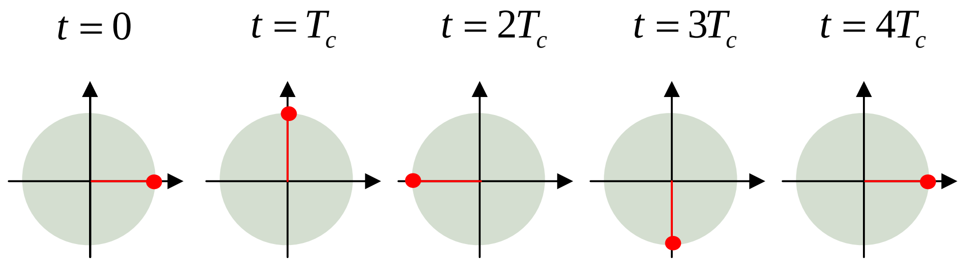
$$x(t) = \exp\left(j2\pi \frac{t}{4T_c}\right)$$

frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{T_c}$

$$X(f) = \delta\left(f - \frac{f_c}{4}\right)$$







A valle del filtro ideale di ricostruzione:

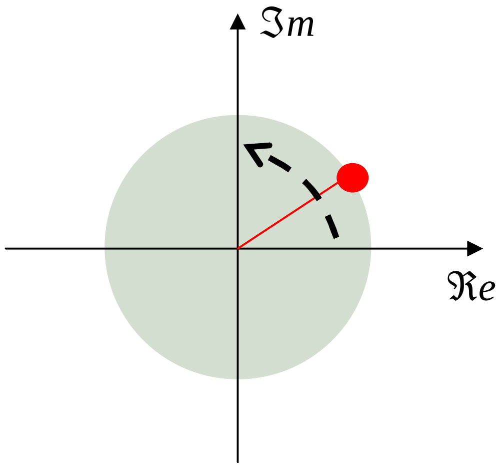
$$X_r(f) = \delta\left(f - \frac{f_c}{4}\right), \quad x_r(t) = \exp\left(j2\pi \frac{t}{4T_c}\right) = x(t)$$

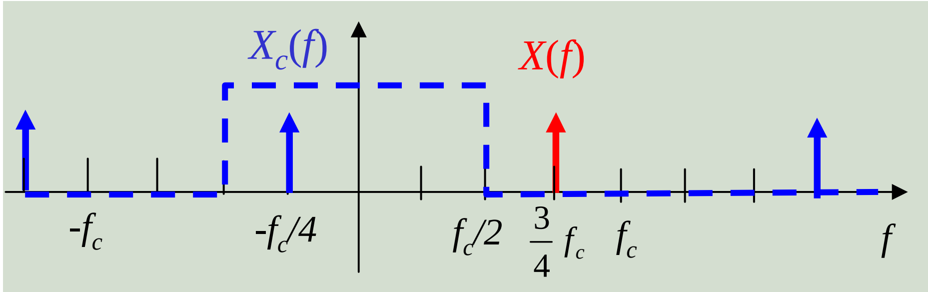
Esempio (continua)...

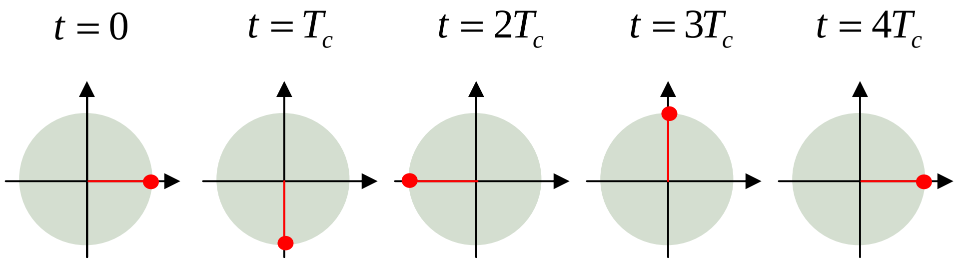
$$x(t) = \exp\left(j2\pi \frac{3t}{4T_c} \right)$$

frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{T_c}$

$$X(f) = \delta\left(f - \frac{3}{4} f_c \right)$$







E questa volta, a valle del filtro ideale di ricostruzione:

$$X_r(f) = \delta\left(f + \frac{f_c}{4} \right), \quad x_r(t) = \exp\left(-j2\pi \frac{t}{4T_c} \right) \neq x(t)$$

Esercizi

1. E' disponibile un filtro passa-basso con guadagno (ampiezza) costante tarabile a piacere (e fase non distorta) fino alla frequenza $0.8\, f_0$, e ampiezza nulla oltre $1.2\, f_0$. La frequenza f_0 si può scegliere arbitrariamente. Si vuole usare questo filtro per ricostruire un segnale di banda B campionato a frequenza f_c.
   Quale deve essere f_c?
   Quale f_0 e quale il guadagno del filtro?
   Quale deve essere almeno il rapporto tra f_c e B?

2. Dato il segnale $y(t)$ con TDF in figura, rappresentare la TDF $Y_c(f)$ del segnale $y(t)$ campionato con:
   a) f_c*=15 campioni/s*
   b) f_c*=17.5 campioni/s*
   c) f_c*=22 campioni/s*
   Determinare l'intervallo delle frequenze di *aliasing* nei tre casi.
   Determinare il segnale campionato $y_c(t)$ nel caso (a).
   Determinare in tutti e tre casi la TDF $Y_r(f)$ del segnale ricostruito tramite filtro di ricostruzione ideale.