SEGNALI COMPLESSI: MODULAZIONE IN FASE E QUADRATURA

Perche' si utilizza la rappresentazione complessa

In natura esistono solo segnali reali, tuttavia e' possibile pensare a segnali che abbiano sia una parte reale sia una immaginaria che evolvono nel tempo:

i segnali complessi.

$$x(t) = \mathrm{Re}\{x(t)\} + j\,\mathrm{Im}\{x(t)\}$$

Anche se i segnali complessi non esistono in natura, essi vengono utilizzati per descrivere in modo compatto coppie di segnali reali di tipo passa-basso (come sono solitamente i segnali da trasmettere) inviati contemporaneamente nella stessa banda di frequenze per mezzo di un segnale di tipo passa-banda, e separabili (come vedremo) in ricezione.

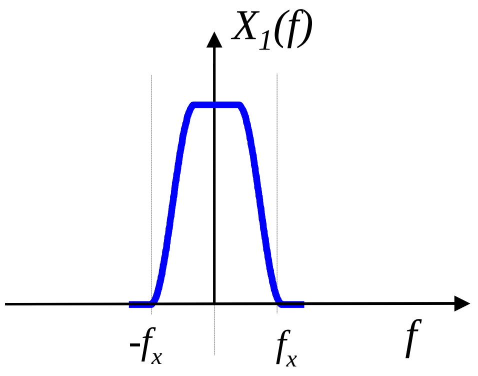
Dal punto di vista fisico, la modulazione (traslazione in frequenza) viene effettuata per usare mezzi trasmissivi di tipo passa-banda (che non sono adatti per trasmettere le basse frequenze). Il segnale modulato e' reale, e di tipo passa-banda, ma dal punto di vista matematico e' molto piu' comodo rappresentarlo mediante un equivalente segnale complesso di tipo passa-basso.

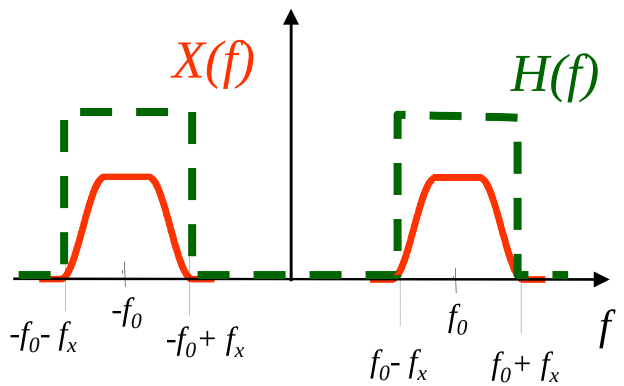
Modulazione per trasmissione su canale Passa Banda (BP)

Si supponga di avere a disposizione un canale ideale di tipo passa-banda, ovvero un sistema LTI con risposta in frequenza unitaria (e fase nulla, per semplicità) in banda ($-f_x-f_0$, f_x-f_0) e (f_0-f_x, f_0+f_x), e nulla altrove. Su un canale di questo tipo si possono trasmettere solo segnali passa-banda.

Sia dato un segnale $x_1(t)$ reale, di tipo passa-basso (LP), cioè con trasformata di Fourier limitata nella banda tra $-f_x$ e $+f_x < f_0$. Si può adattare $x_1(t)$ per essere trasmesso sul canale BP tramite modulazione per seno o coseno:

$$\boxed{x(t) = x_1(t)\cos(2\pi f_o t) \quad \leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2}X_1(f+f_o) + \frac{1}{2}X_1(f-f_o)}$$



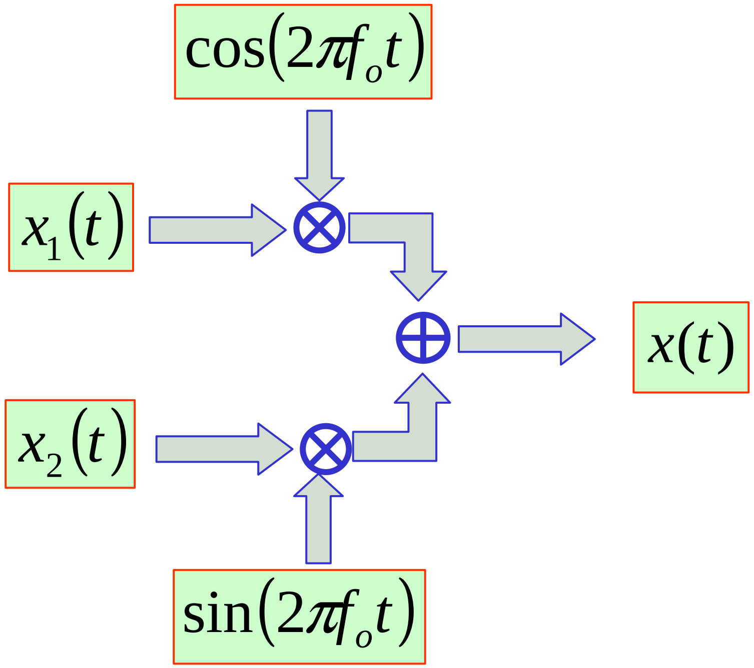


Modulazione per seno e coseno

Si consideri il segnale *x(t)* costituito dalla somma di due segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ moltiplicati rispettivamente per un coseno (modulazione in fase) e un seno (modulazione in quadratura) alla stessa frequenza f_o :

$$x(t) = x_1(t)\cos(2\pi f_o t) + x_2(t)\sin(2\pi f_o t)$$

I due segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ siano reali, con la medesima durata, e abbiano trasformata di Fourier limitata nella banda tra $-f_x$ e $+ f_x < f_0$. Si dimostra che $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono separabili a partire da *x(t)*.



Demodulazione in fase e in quadratura

Moltiplicando $x(t)$ per il coseno (di ampiezza 2) a frequenza f_o si ottiene:

$$2x(t)\cos(2\pi f_o t) = 2x_1(t)\cos^2(2\pi f_o t) + 2x_2(t)\sin(2\pi f_o t)\cos(2\pi f_o t) =$$
$$= x_1(t) + x_1(t)\cos(4\pi f_o t) + x_2(t)\sin(4\pi f_o t)$$

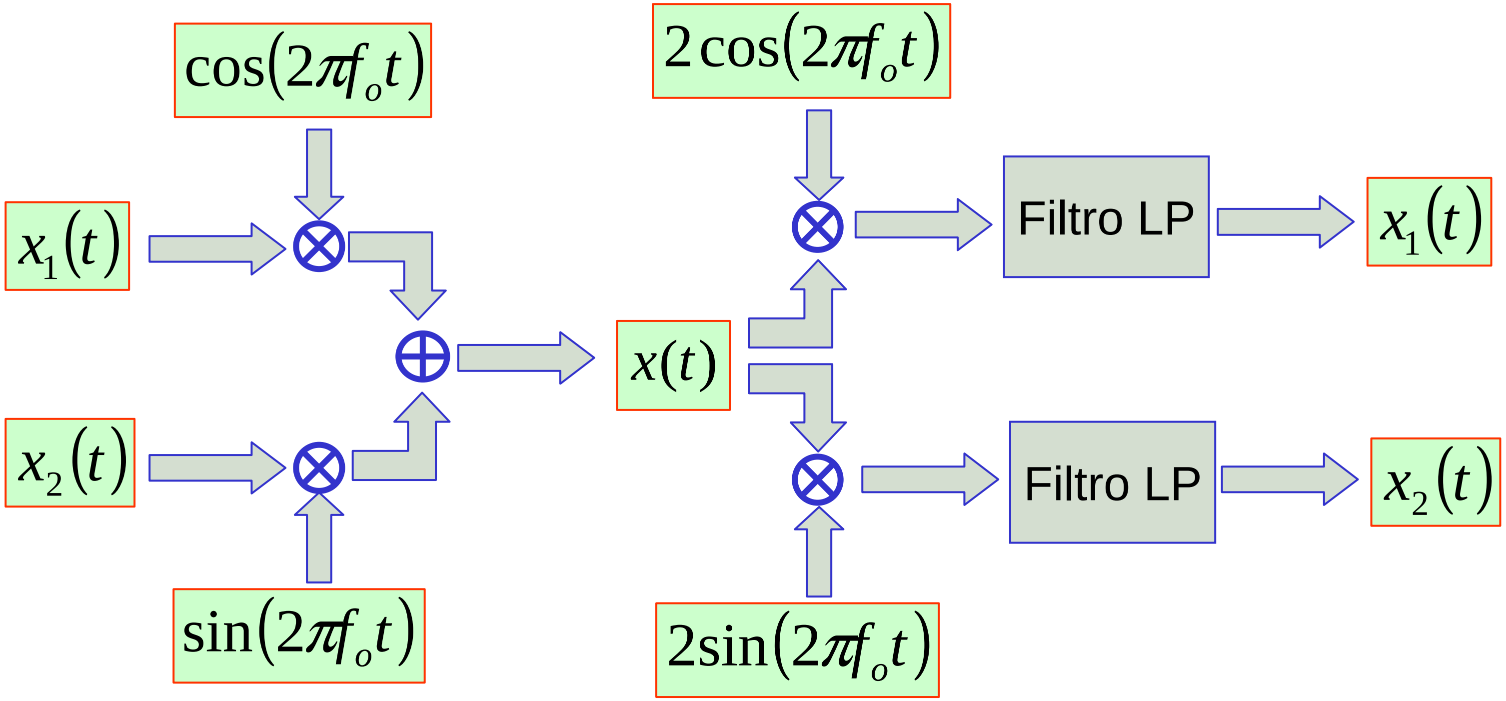
Questo segnale contiene tre componenti di cui una sola, $x_1(t)$, a bassa frequenza. Dunque per ottenere $x_1(t)$ e' sufficiente moltiplicare $x(t)$ per il coseno e filtrare passa-basso (operazione detta demodulazione coerente in fase).

Analogamente, moltiplicando $x(t)$ per il seno a frequenza f_o si ottiene:

$$2x(t)\sin(2\pi f_o t) = 2x_1(t)\cos(2\pi f_o t)\sin(2\pi f_o t) + 2x_2(t)\sin^2(2\pi f_o t) =$$
$$= x_1(t)\sin(4\pi f_o t) + x_2(t) - x_2(t)\cos(4\pi f_o t)$$

Anche questo segnale contiene tre componenti di cui solo $x_2(t)$ a bassa frequenza. E' sufficiente filtrare passa-basso $x(t)$ moltiplicato per il seno per ottenere $x_2(t)$ (demodulazione coerente in quadratura).

Schema del mo-demodulatore



Poichè la modulazione è fatta per adattare il segnale da trasmettere al canale,
Il modulatore e' nel trasmettitore mentre il demodulatore, nel ricevitore, serve per recuperare il segnale originale.

<u>Una nota sui segnali ortogonali</u>

Si noti che seno e coseno moltiplicati tra loro non danno luogo ad alcuna componente continua:

$$\boxed{\sin(2\pi f_o t)\cos(2\pi f_o t) = \frac{1}{2}\sin(4\pi f_o t)}$$

*e quindi il prodotto ha valor medio nullo. Per tale motivo i segnali <u>seno e coseno</u> sono detti **<u>ortogonali</u>**.*

Piu’ in generale <u>segnali di potenza finita</u> sono detti <u>ortogonali</u> se il prodotto ha <u>valor medio nullo.</u>

<u>Segnali con energia finita</u> sono detti <u>ortogonali</u> se l’<u>integrale del prodotto</u> e’ <u>nullo</u>.

Notazione complessa

Un modo piu' *compatto* per scrivere la modulazione e quindi il segnale x(t) passa banda é il seguente:

$$x(t) = \mathrm{Re}\{(x_1(t) + jx_2(t))\exp(-j2\pi f_o t)\} = x_1(t)\cos(2\pi f_o t) + x_2(t)\ \sin(2\pi f_o t)$$

Il segnale complesso $\tilde{x}(t) = x_1(t) + jx_2(t)$ é detto *equivalente passa basso* di x(t).
Valgono anche:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{x}(t)\exp(-j2\pi f_o t) + \tilde{x}^*(t)\exp(j2\pi f_o t)\right]$$

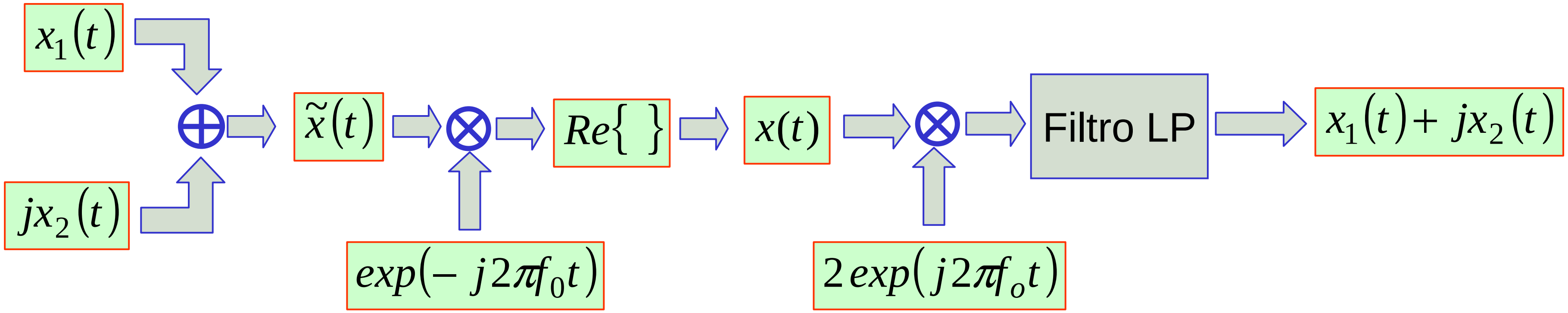
$$\tilde{X}(f) = 2\ X(f + f_o)u(f + f_o)$$

Le uniche differenze rispetto a prima sono che:
1 - il segnale e' unico, ma complesso (prima ne avevamo due reali)
2 - la moltiplicazione per il coseno e' sulla parte reale e quella per il il seno sulla parte immaginaria.

Anche la demodulazione si può rappresentare in forma complessa:

$$x(t)\,2\exp(j2\pi f_o t) = x_1(t) + jx_2(t) + \tilde{x}^*(t)\exp(j4\pi f_o t) \xrightarrow{LP} x_1(t) + jx_2(t)$$

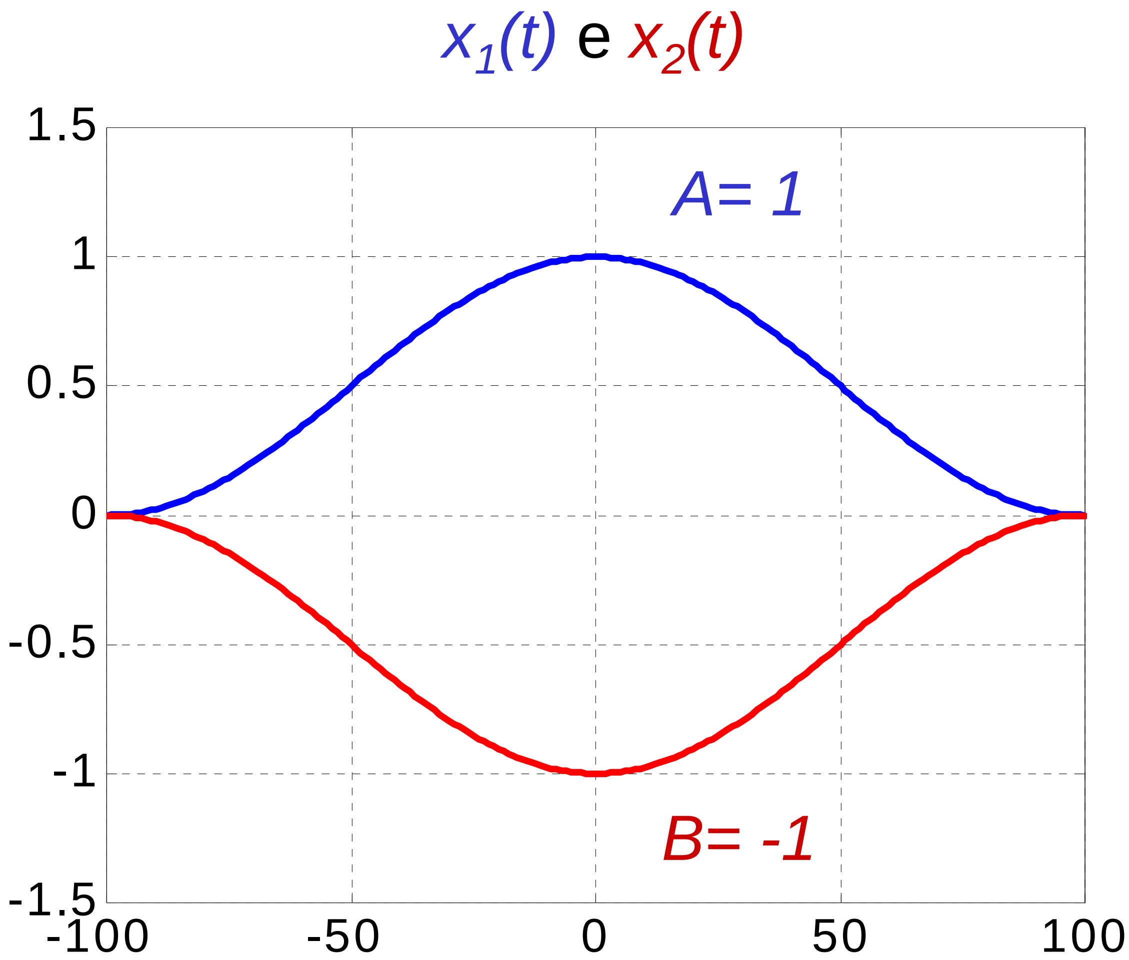
Schema (matematico) del modulatore e demodulatore complesso



Nota: spesso si preferisce cambiare segno alla componente in quadratura, cioe' usare come "portante" $-\sin(2\pi f_0 t)$. Si vede facilmente che in tal caso si modula moltiplicando per $\exp(j2\pi f_0 t)$ e si demodula moltiplicando per $2\exp(-j2\pi f_0 t)$.

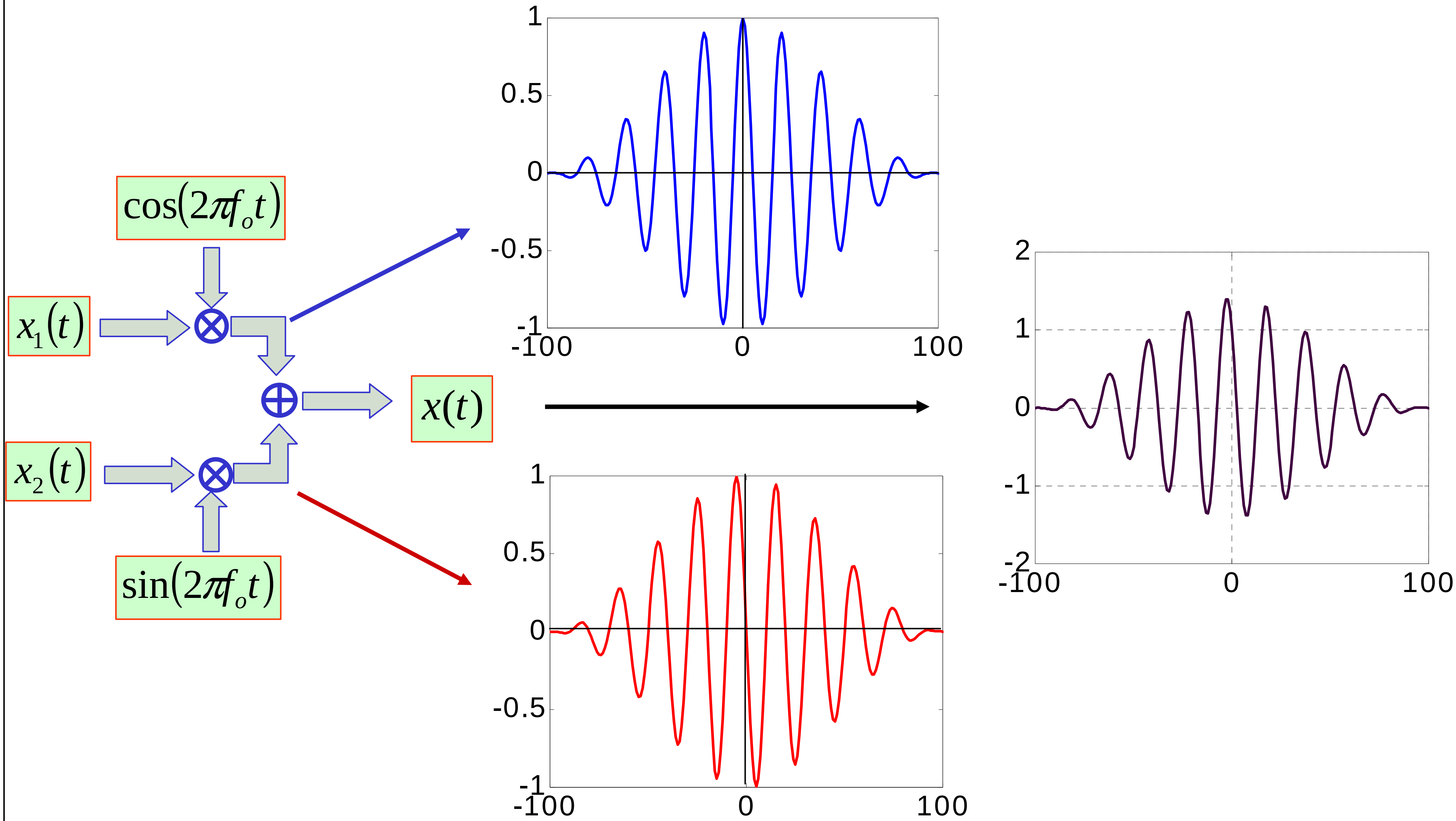
Esempio: i segnali in banda base

Supponiamo che $x_1(t)$ e $x_2(t)$ siano i due segnali in “banda base” (cioe’ passa-basso) a banda e durata limitata con ampiezza massima A e B in $t=0$.



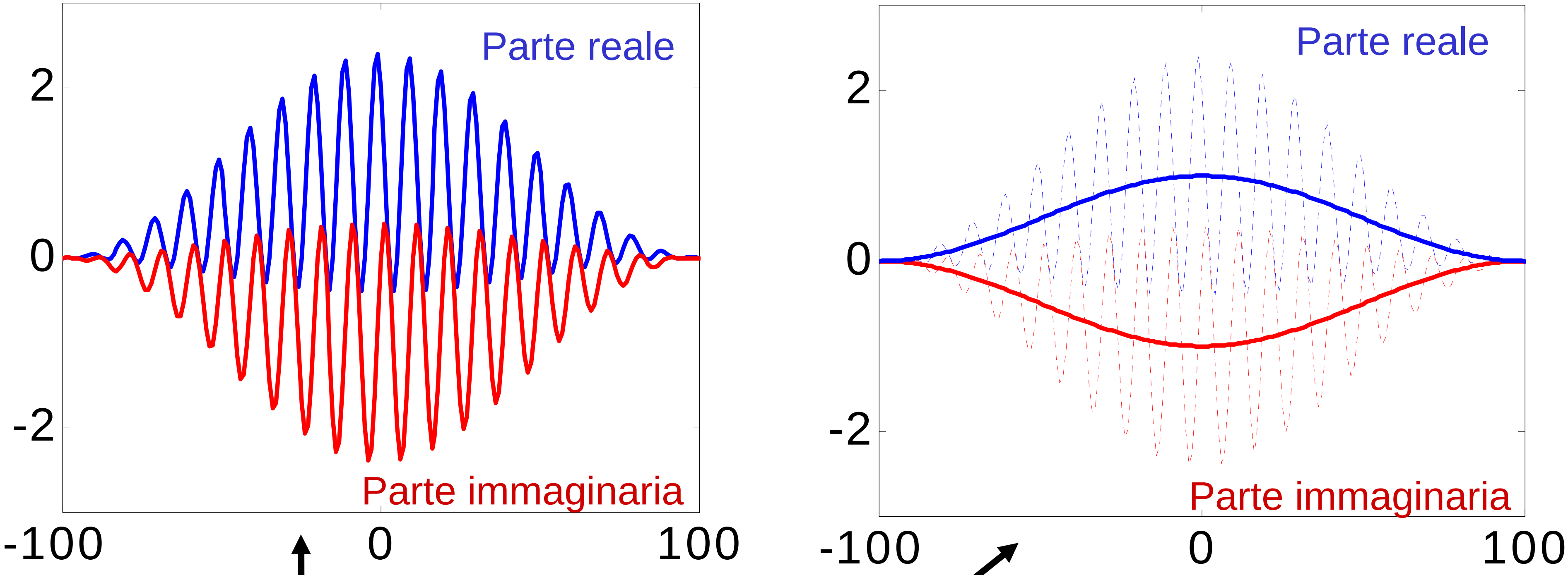
Esempio: i segnali modulati in fase e quadratura

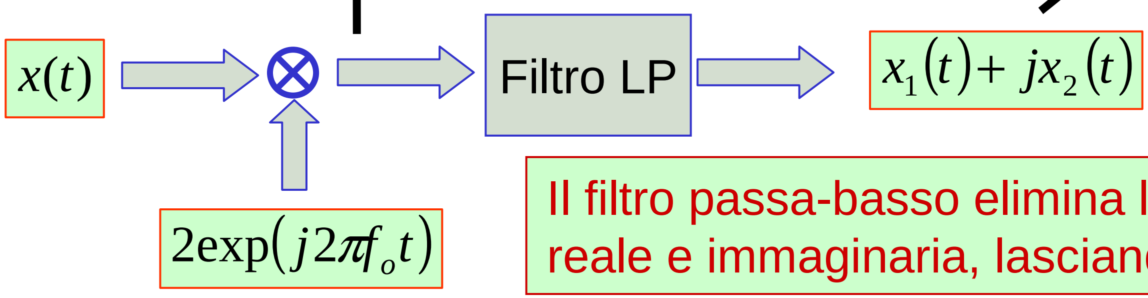
A valle del modulatore otteniamo i seguenti segnali:



Esempio: il segnale demodulato

A valle del demodulatore (sempre per *A=1* e *B=-1*) otteniamo il seguente segnale:





Il filtro passa-basso elimina le componenti oscillanti delle parti reale e immaginaria, lasciando passare il valor medio locale.