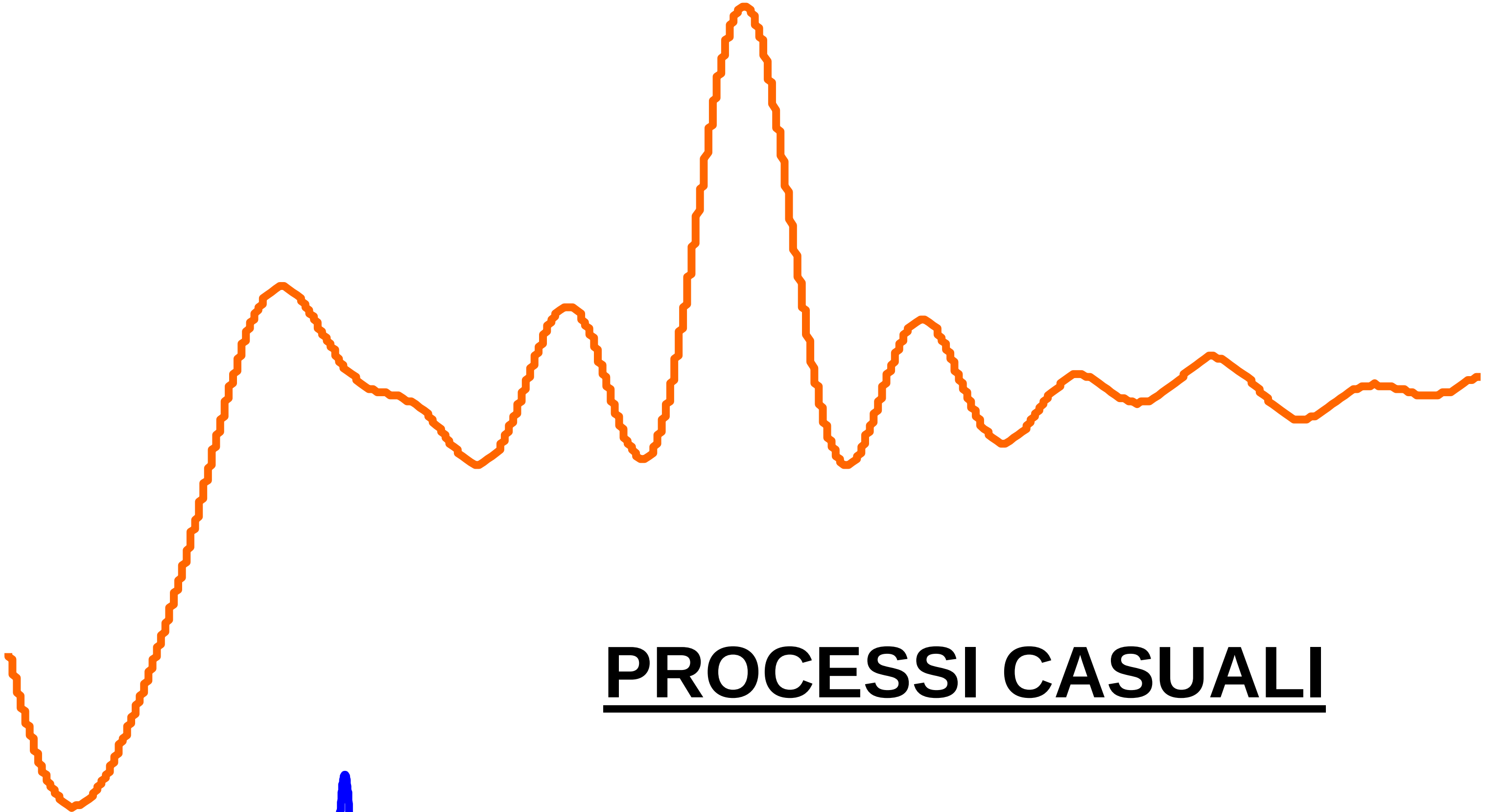
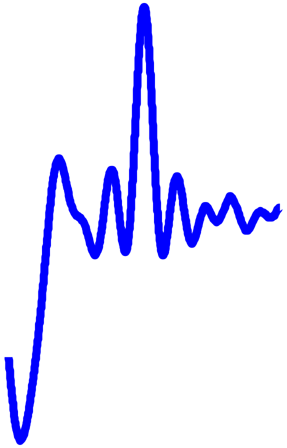


PROCESSI CASUALI



Segnali deterministici

Un segnale $x(t)$ si dice deterministico se è una funzione nota di t, cioè se ad un qualsiasi istante di tempo t_o è associato un ben preciso valore $x(t_o)$.

Ad esempio i valori assunti dal segnale $x(t)=\cos(2\pi t)$ sono noti con certezza per ogni valore di t :

t	…	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	…
$x(t)$	…	-0.809	-0.309	0.309	0.809	1	0.809	0.309	-0.309	-0.809	...

Non ha alcuna importanza il fatto che il segnale sia rappresentabile con una semplice funzione matematica come il coseno, ma solo che sia noto in modo univoco. In un certo senso qualunque segnale, anche il meno prevedibile (come il segnale radio captato da un'antenna, il rumore presente in un dispositivo elettronico, …), può essere considerato deterministico, una volta che sia stato osservato!

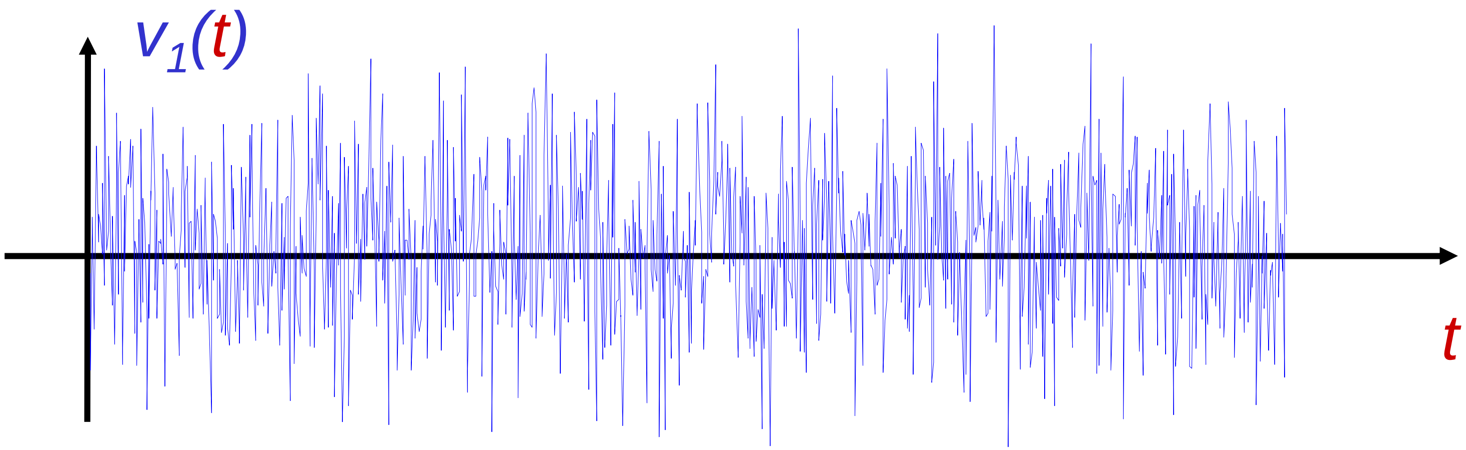
Questo punto di vista non è però particolarmente utile per la maggior parte dei segnali che trasportano informazione, e quindi non prevedibili *a priori*.

Introduzione ai processi casuali (1)

Il rumore termico

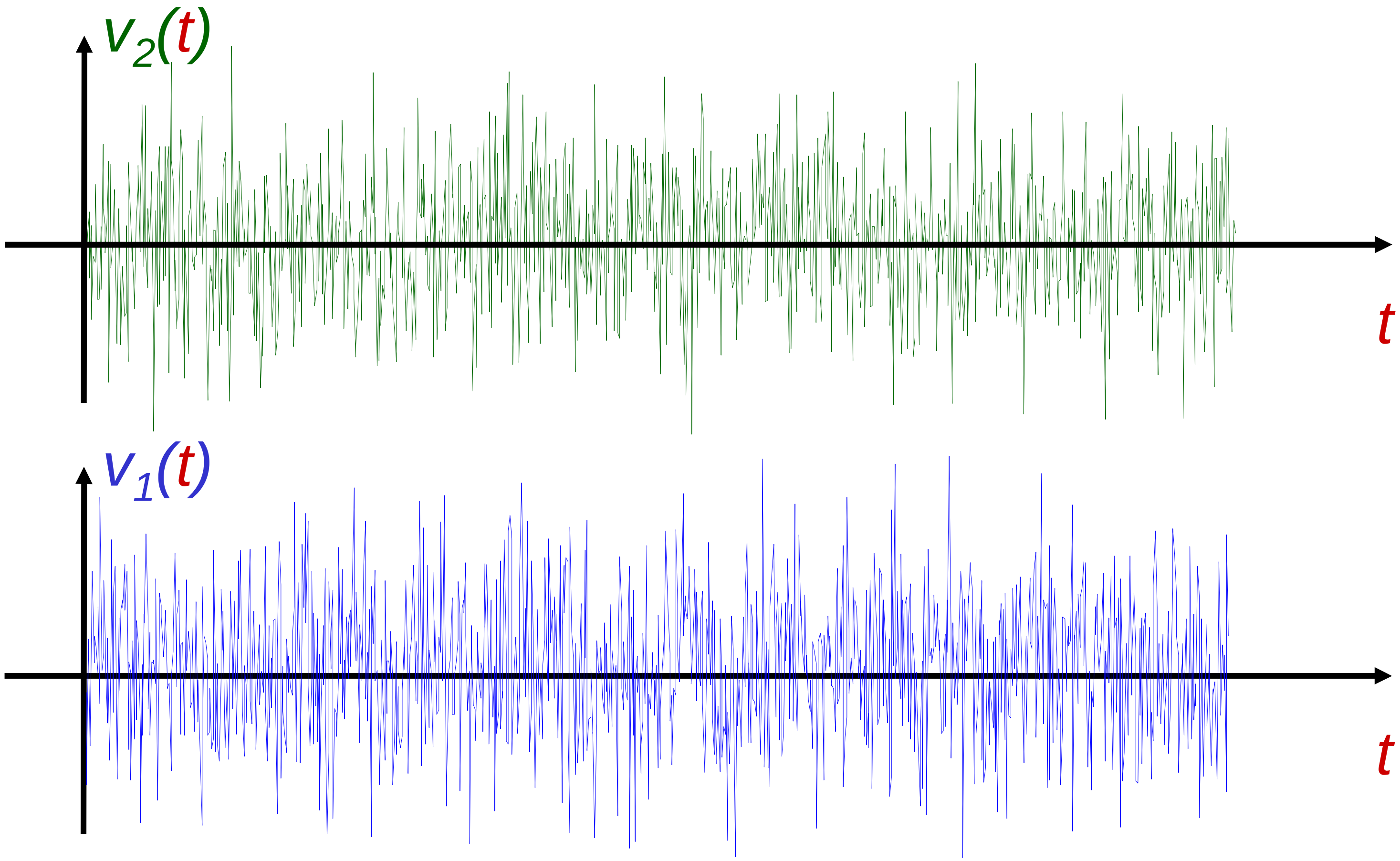
Un classico e importante esempio utile a introdurre il concetto di processo casuale è rappresentato dalla debole tensione elettrica $v_1(t)$ esistente ai capi di un resistore. Questa tensione, variabile nel tempo, è causata dal movimento caotico degli elettroni (questo effetto, indesiderato, cresce con la temperatura del materiale).

Se si registra la tensione $v_1(t)$ si ottiene (dopo aver effettuato la misura!) un segnale che può essere considerato deterministico.



Introduzione ai processi casuali (2)

Se però si prende un secondo resistore identico al primo, posto alla stessa temperatura, e si esegue la misura della tensione elettrica ai suoi capi, si ottiene un nuovo segnale $v_2(t)$, con **caratteristiche simili** ma **diverso** dal precedente poiché gli elettroni si muovono in modo diverso, ed indipendentemente, nei due resistori.



Introduzione ai processi casuali (3)

Se lo scopo è determinare l'effetto del rumore termico prodotto dal resistore su un'apparecchiatura elettronica o un sistema di trasmissione, non è di alcuna utilità aver visto l'andamento delle tensioni $v_1(t)$ o $v_2(t)$ ai capi dei due resistori se il resistore effettivamente montato nell'apparecchiatura è un altro (o anche il primo, ma in un tempo successivo: il rumore termico non si ripete in modo prevedibile!).

E' utile invece individuare e descrivere le caratteristiche della tensione di rumore comuni a tutti i resistori dello stesso tipo e a quella stessa temperatura.

In questo modo, qualsiasi sia il resistore (di quel valore e a quella temperatura) montato nell'apparecchiatura, si potrà calcolare, per esempio, con quale probabilità si presenteranno certi valori di tensione o quale sarà la potenza del rumore.

Si abbandona dunque il concetto di certezza (proprio dei segnali deterministici) per passare a quello dell'incertezza, descritto dalla teoria delle probabilità e proprio dei **processi casuali**.

I valori del processo in generici istanti di tempo sono considerati variabili casuali, e descritti come tali (attraverso le relative densità di probabilità).

Descrizione dei processi casuali

Di un processo casuale è utile conoscere le caratteristiche comuni a tutte le realizzazioni.

Un processo casuale è descritto completamente dalle densità di probabilità congiunte di tutti gli ordini e per tutti gli istanti di tempo. Tuttavia in molti casi questa informazione completa non è disponibile. In pratica si utilizzano soprattutto:

la densità di probabilità delle ampiezze del processo $p_x(a)$

che descrive con quale probabilità una realizzazione del processo casuale $x(t)$ assume valori in un intorno di a. In generale $p_x(a)$ dipende anche dal tempo. Tuttavia noi ci occuperemo di una classe di processi casuali detti stazionari le cui caratteristiche statistiche non dipendono dal tempo t.

la funzione di autocorrelazione del processo $R_x(\tau)$

che descrive quantitativamente il legame tra il valore assunto da una realizzazione del processo casuale al tempo $t+\tau$ e quello assunto dalla stessa realizzazione al tempo t.

Limitando l'analisi ai processi casuali stazionari, $R_x(\tau)$ non dipende dal tempo t ma solo dall'intervallo di tempo τ.

Densità di probabilità del processo casuale

La densità di probabilità (d.d.p.) di un processo stazionario non ha nulla di diverso rispetto alla densità di probabilità di una variabile casuale. Infatti, ad un tempo assegnato $t = t_o$, il processo casuale è una variabile casuale $x = x(t_o)$ (solitamente si sottintende l'istante di tempo t_o e si indica la variabile casuale con x) e come tale può essere trattato.

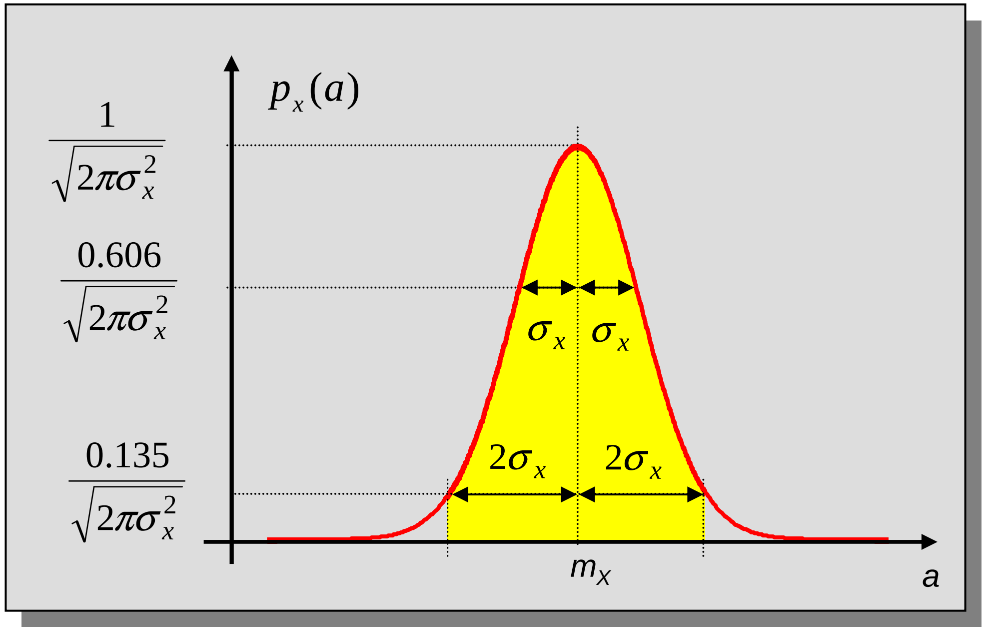
Analogamente le densità di probabilità congiunte di un processo stazionario non sono altro che le densità congiunte in due (o più) istanti di tempo.

esempio: d.d.p. gaussiana

$$p_x(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(a - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

valor medio m_x, varianza σ^2_x

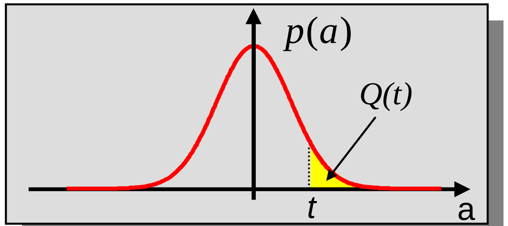
$$P(m_x - \sigma_x < x \le m_x + \sigma_x) \approx 0.683$$
$$P(m_x - 2\sigma_x < x \le m_x + 2\sigma_x) \approx 0.954$$
$$P(m_x - 3\sigma_x < x \le m_x + 3\sigma_x) \approx 0.997$$



Funzione *Q* e funzione errore complementare (*erfc*)

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} \exp\left(-a^2/2\right) da,$$

$$erfc(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_s^{+\infty} \exp\left(-a^2\right) da$$

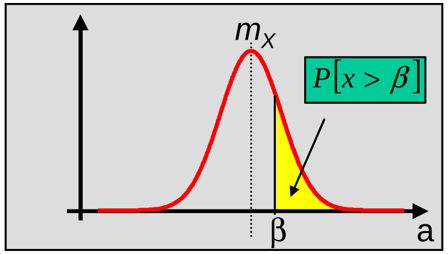


t	Q(t)	t	Q(t)
0,00	5,000E-01	0,8	2,119E-01
0,05	4,801E-01	1,0	1,587E-01
0,10	4,602E-01	1,2	1,151E-01
0,15	4,404E-01	1,4	8,080E-02
0,20	4,207E-01	1,6	3,806E-01
0,25	4,013E-01	1,8	3,590E-02
0,30	3,821E-01	2,0	2,280E-02
0,35	3,622E-01	2,4	8,200E-03
0,40	3,446E-01	2,8	2,600E-03
0,45	3,264E-01	3,2	6,871E-04
0,50	3,085E-01	3,6	1,591E-04
0,60	2,743E-01	4,0	3,167E-05

s	erfc(s)	s	erfc(s)
0,0	1,000E+00	1,6	2,370E-02
0,1	8,875E-01	1,8	1,090E-02
0,2	7,730E-01	2,0	4,700E-03
0,3	6,714E-01	2,2	1,900E-03
0,4	5,716E-01	2,4	6,885E-04
0,5	4,795E-01	2,6	2,360E-04
0,6	3,961E-01	2,8	7,502E-05
0,7	3,222E-01	3,0	2,209E-05
0,8	2,579E-01	3,3	3,057E-06
1,0	1,573E-01	3,7	1,671E-07
1,2	9,700E-02	4,0	1,542E-08
1,4	4,770E-02	5,0	1,537E-12

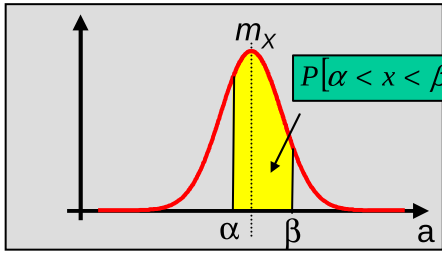
Entrambe le funzioni tabulate si possono usare per calcolare la probabilità che la variabile casuale x gaussiana con valor medio m_x e varianza σ^2_x superi un valore assegnato:

$$P[x > \beta] = \int_\beta^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) da = Q\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\beta - m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)$$



Oppure che cada in un intervallo assegnato:

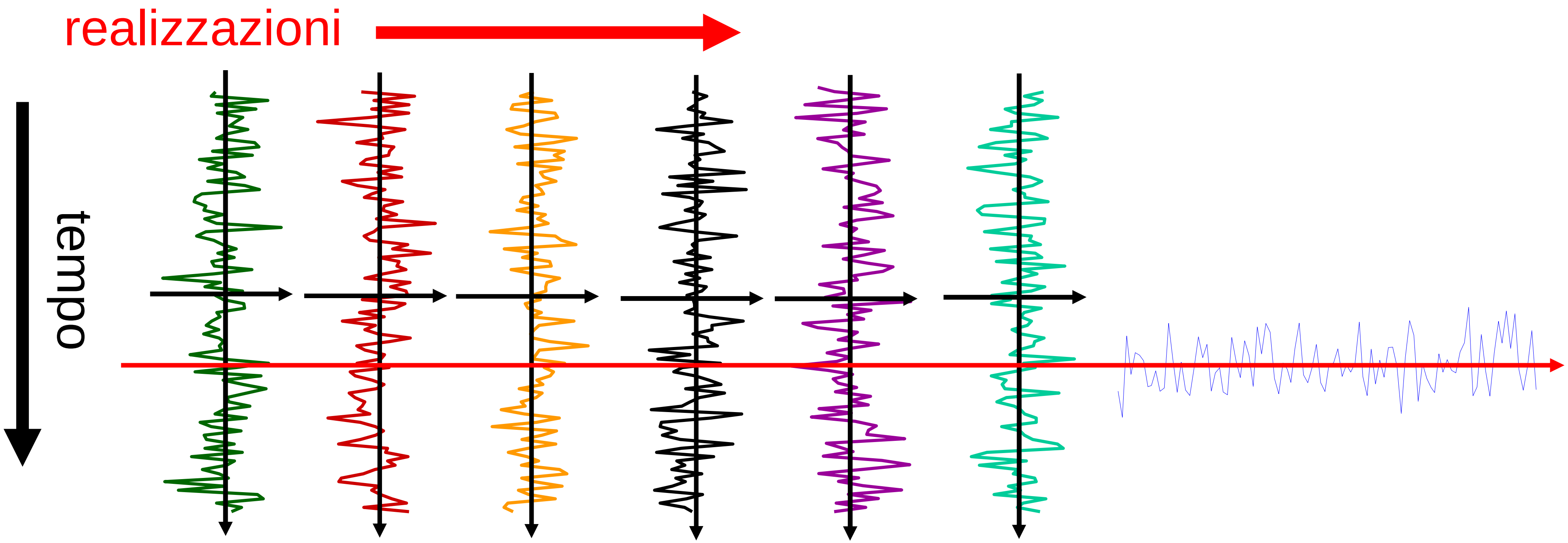
$$P[\alpha < x < \beta] = Q\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right) - Q\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\alpha - m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right) - \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\beta - m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)$$



Processi casuali ergodici

Tra i processi casuali **stazionari** esistono processi per i quali si possono ricavare la densità di probabilità e la funzione di autocorrelazione da una sola realizzazione.

Questi processi sono detti ergodici.

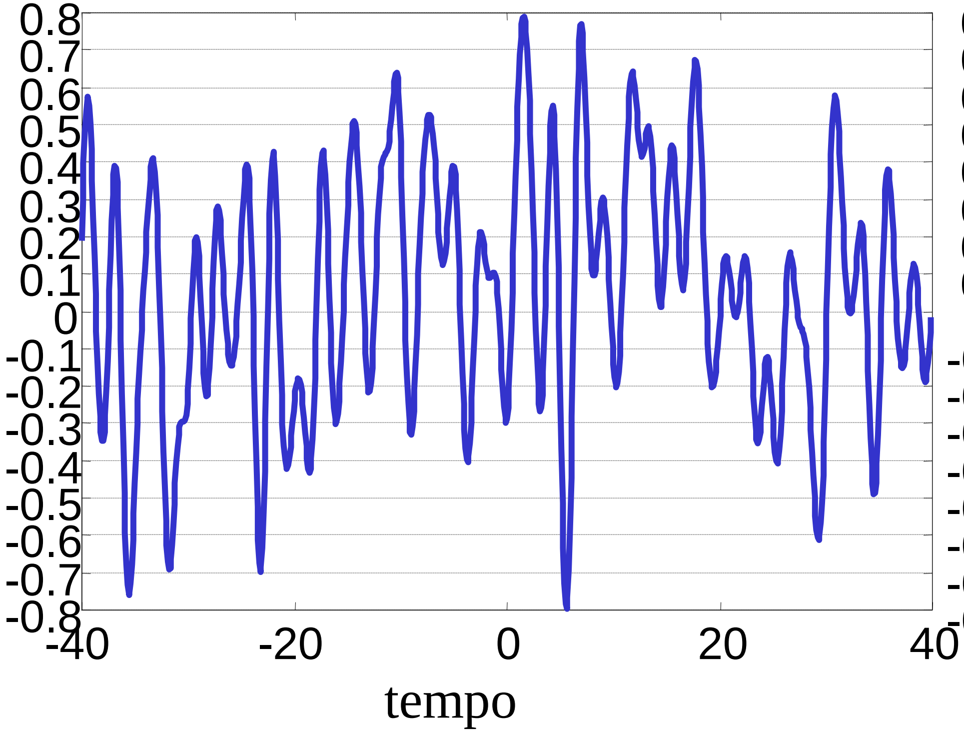


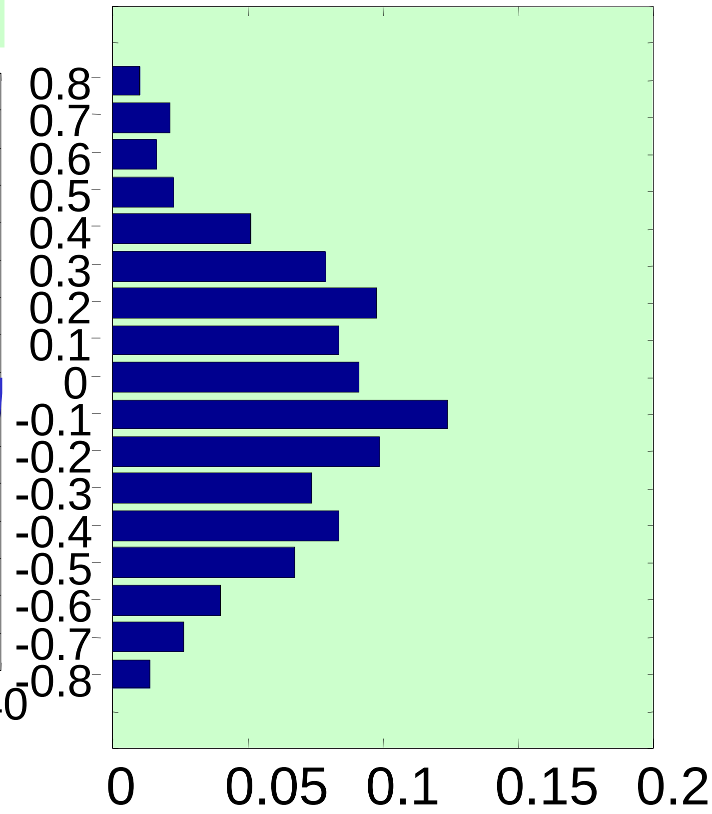
Osservare tutte le realizzazioni ad un istante di tempo (o ad una coppia di istanti) permette di ricavare le stesse informazioni statistiche ottenibili dall'osservazione prolungata nel tempo di una singola realizzazione.
Un esempio di processo ergodico è rappresentato dal rumore termico.

Densità di probabilità di un processo casuale ergodico

La densità di probabilità di un processo casuale ergodico può essere valutata, oltre che dall’insieme delle realizzazioni (ad un solo istante di tempo, arbitrario) anche da una sola realizzazione, come percentuale del tempo in cui il processo assume ampiezze fra ***a*** e ***a+da*** divisa per l’ampiezza dell’intervallo ***da***.

una realizzazione del processo casuale



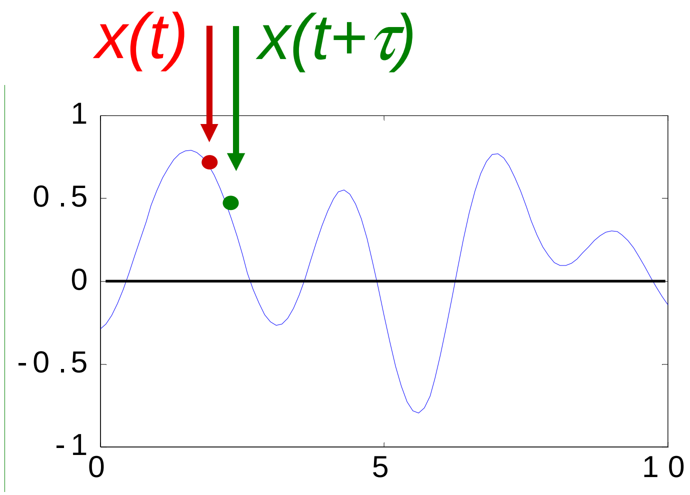


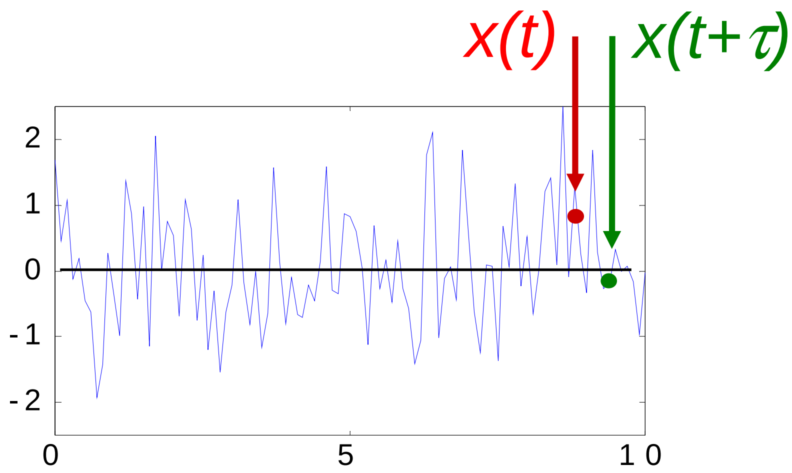
Autocorrelazione di un processo casuale stazionario (1)

L'autocorrelazione del processo $x(t)$ è definita come valor medio di $x(t)x(t+\tau)$, ed è calcolabile dalla ddp congiunta. Se il processo è stazionario l'autocorrelazione non dipende da t, ma solo da τ. L'autocorrelazione è interpretabile come media aritmetica, su un gran numero di realizzazioni, dei prodotti dei valori del processo agli istanti t e $t+\tau$.

$$R_x(\tau) = E\left[\boxed{x(t)}\,\boxed{x(t+\tau)}\right] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)\,x_i(t+\tau)$$

Il primo dei due processi casuali in figura ha realizzazioni che variano lentamente nel tempo (ad es. il rumore di un motore di un'auto al minimo); il secondo ha realizzazioni che variano con grande rapidità (ad es. il fruscio di fondo di un vecchio disco rovinato).





Autocorrelazione di un processo casuale stazionario (2)

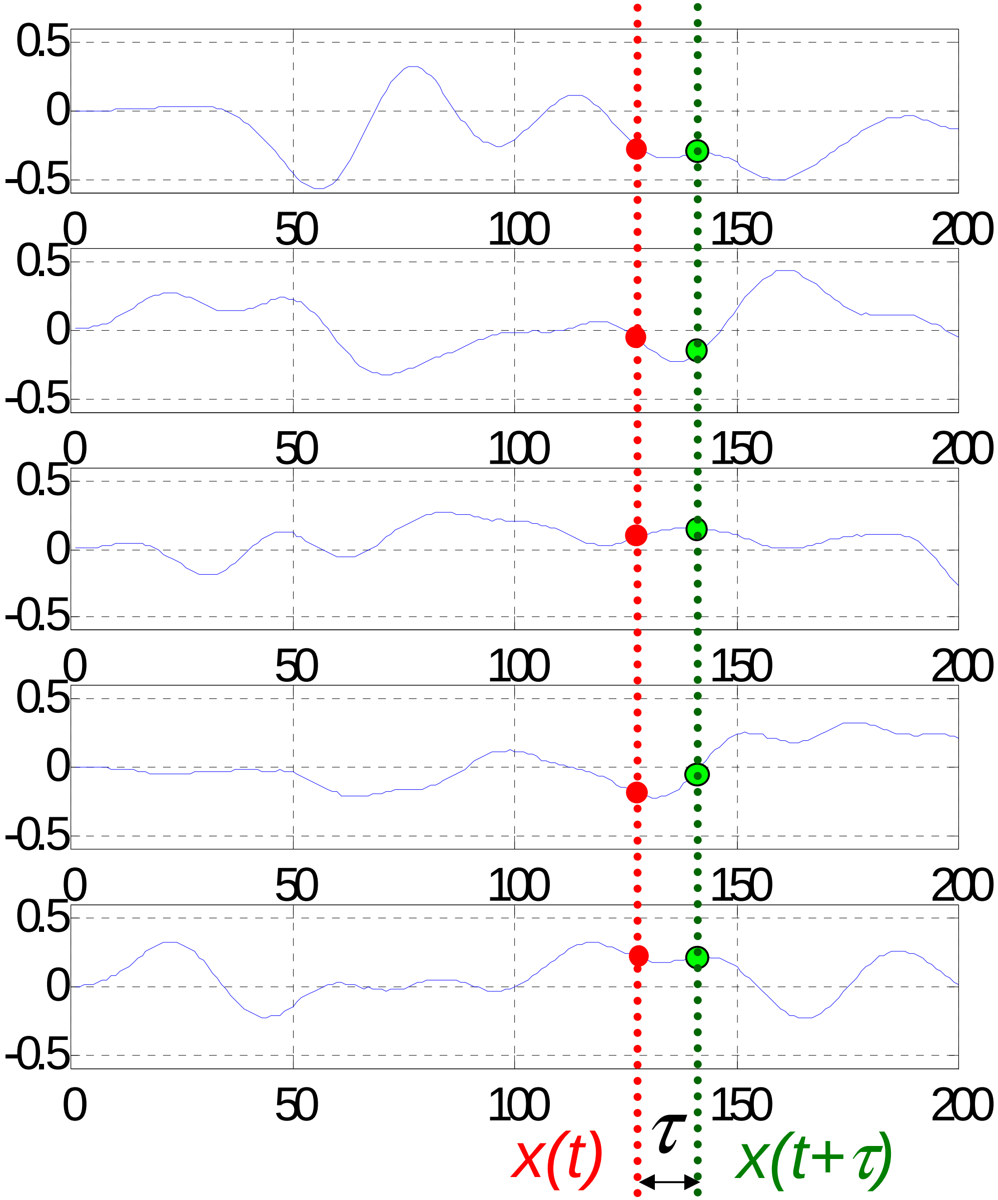
Esempi di realizzazioni di un processo (con valor medio nullo) che varia lentamente

Se ***x(t)*** ***varia lentamente nel tempo***, ***x(t+τ)*** **è solitamente poco diverso** da ***x(t)***: il prodotto $x_i(t)x_i(t+\tau)$ ha segno positivo per quasi tutte le realizzazioni.

Per $\tau = 0$ l'autocorrelazione è la varianza del processo; per $\tau > 0$ è minore.

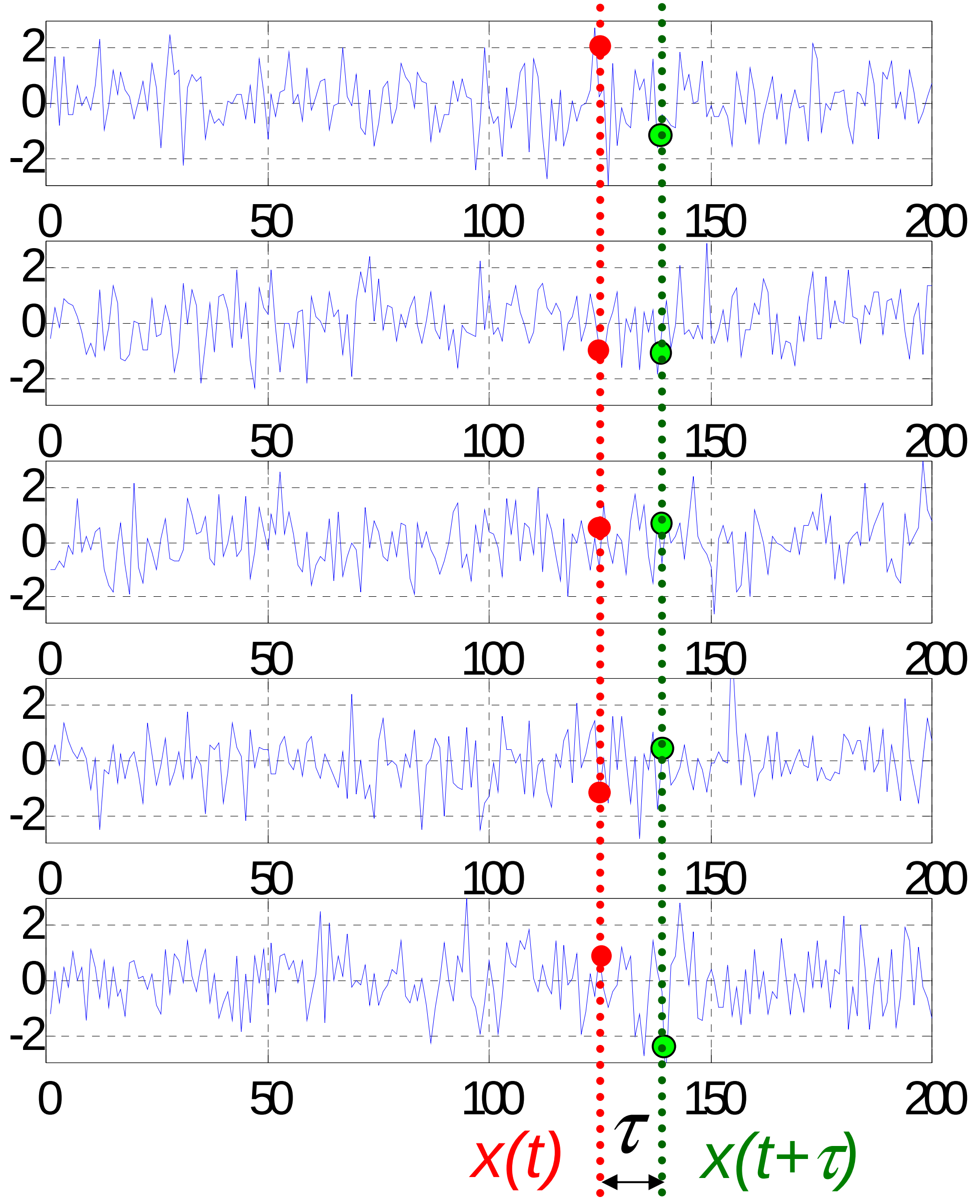
$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

$$R_x(0) = E[x^2(t)]$$



Autocorrelazione di un processo casuale stazionario (3)

Esempi di realizzazioni di un processo (con valor medio nullo) che varia rapidamente

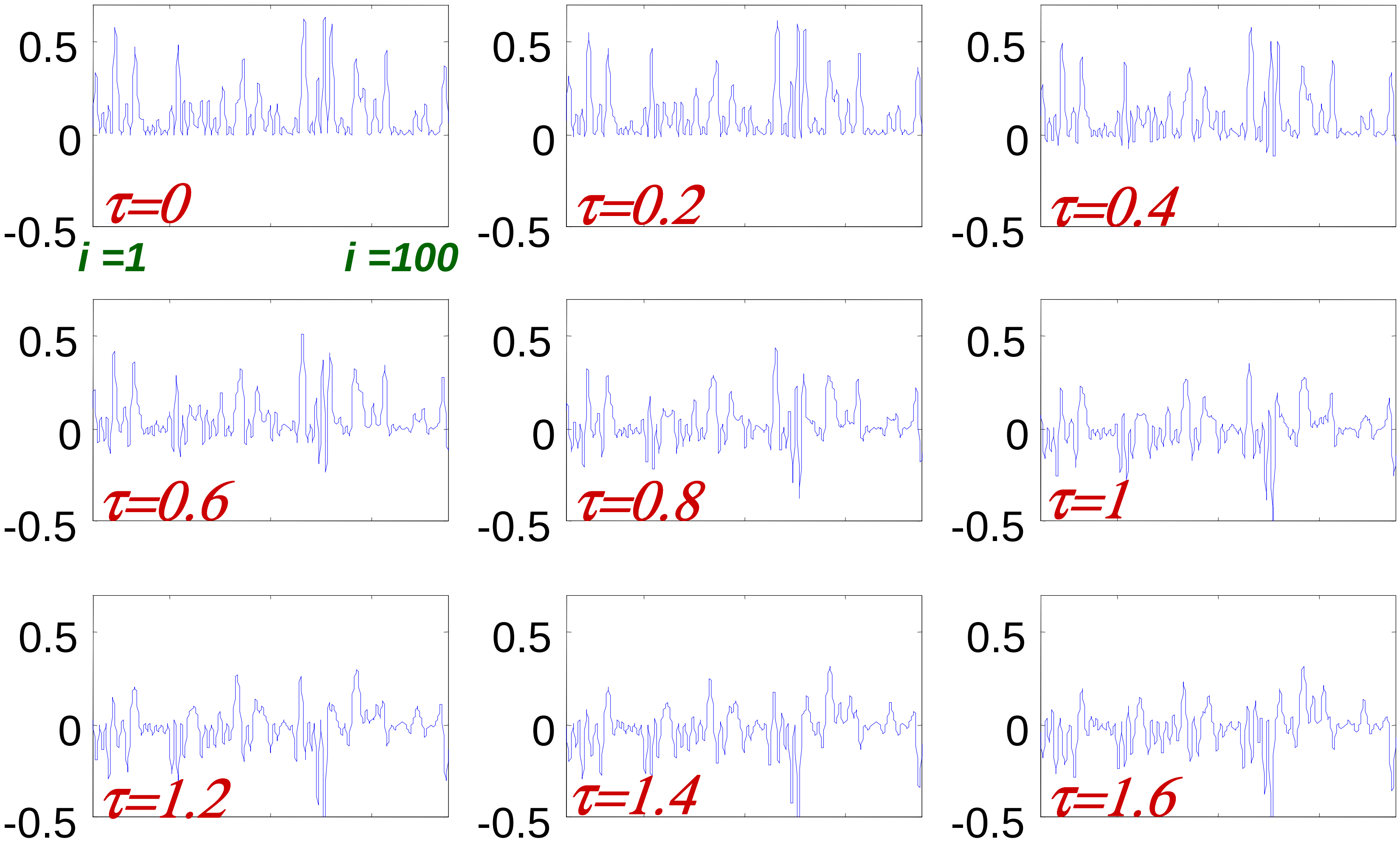


Se ***x(t)*** ***varia rapidamente nel tempo***, ***x(t+τ)*** **è spesso molto diverso** da ***x(t)***: il prodotto ***$x_i(t)x_i(t+\tau)$*** ha segno casuale nelle varie realizzazioni e quindi l'autocorrelazione ha un valore prossimo a zero.

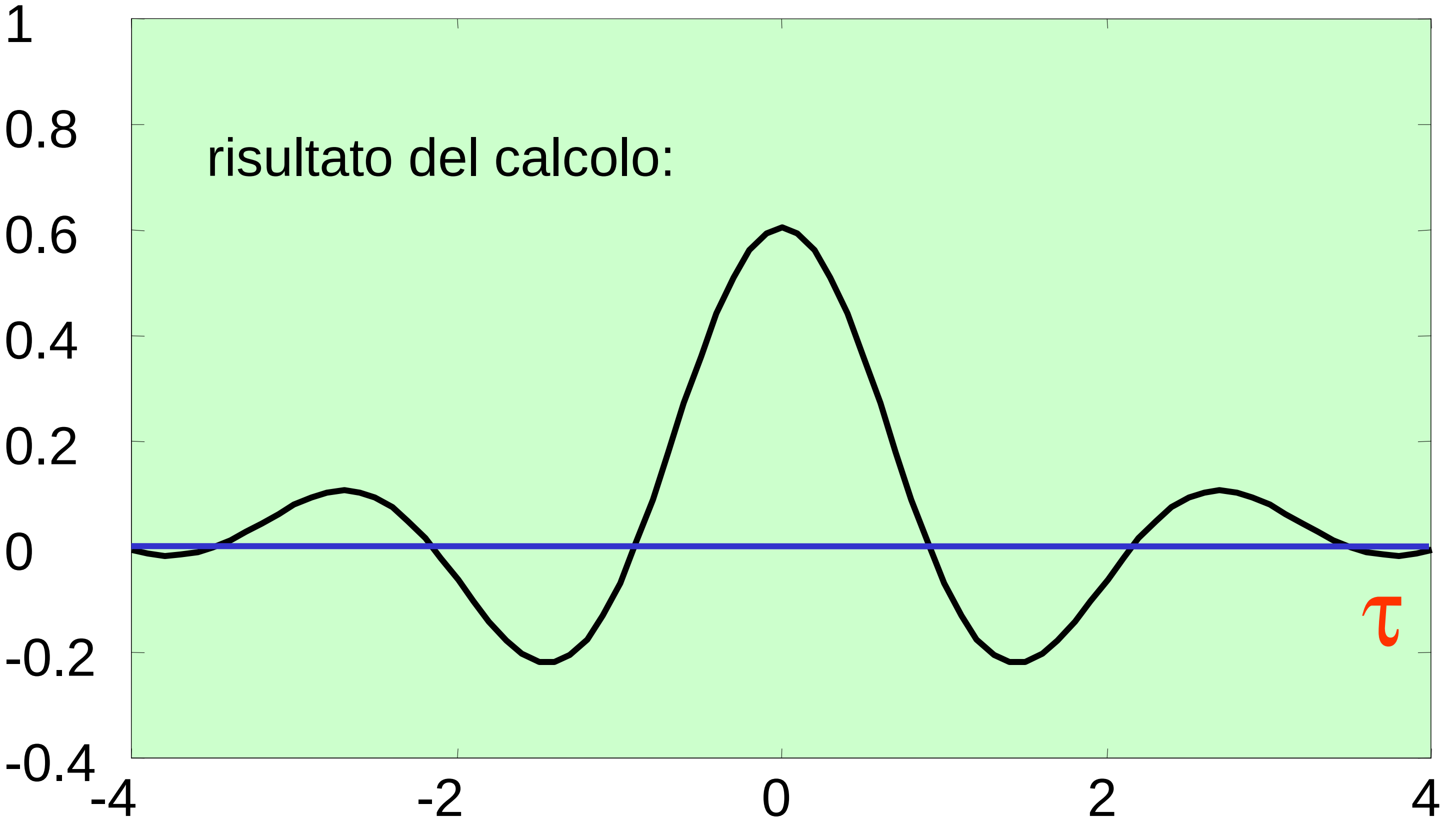
$$\boxed{R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]}$$

Esempio di valutazione dell'autocorrelazione (1)

$$x_i(t)\,x_i(t+\tau)$$



Esempio di valutazione dell'autocorrelazione (2)

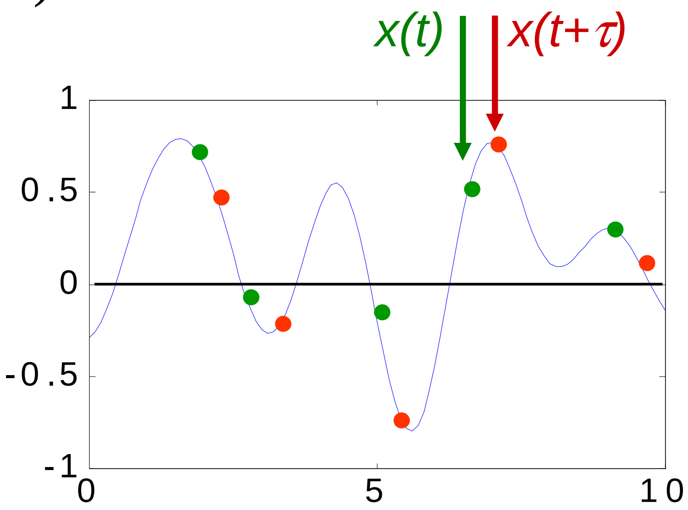


Nota: è evidente, dalla definizione di autocorrelazione, che per qualsiasi processo casuale stazionario $R_x(\tau)$ è una funzione pari, cioè $R_x(-\tau)= R_x(\tau)$.

Autocorrelazione di una realizzazione (media temporale)

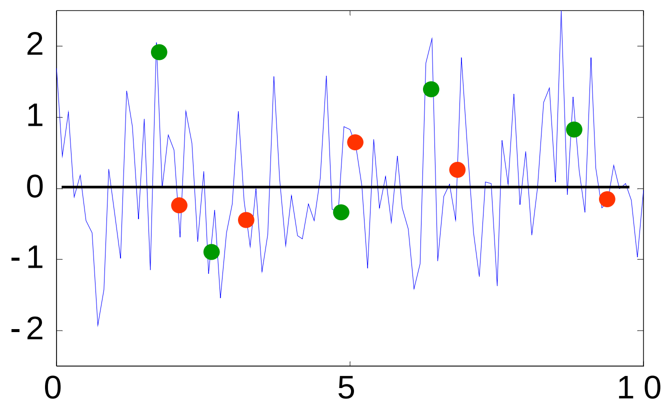
L'autocorrelazione di una singola realizzazione è definita come media nel tempo dei valori di *x(t)x(t+τ)*:

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x(t+\tau)\, dt$$



In generale varia da una realizzazione all'altra. Se però il processo è ergodico, coincide con l'autocorrelazione definita sull'insieme di tutte le realizzazioni.

Se ***x(t)*** ***varia lentamente nel tempo***, ***x(t+τ)*** **è poco diverso** da ***x(t)***: il prodotto ***x(t)x(t+τ)*** ha segno molto spesso positivo, e l'autocorrelazione assume un valore relativamente elevato.



Se ***x(t)*** ***varia rapidamente nel tempo***, ***x(t+τ)*** **è molto diverso** da ***x(t)***: il prodotto ***x(t)x(t+τ)*** ha segno casuale, e l'autocorrelazione assume un valore prossimo a zero.

Proprietà dell'autocorrelazione di processi stazionari ergodici

1 L'autocorrelazione é una funzione pari: $$\boxed{R_x(\tau) = R_x(-\tau)}$$

x(t) e ***x(t+τ)*** possono scambiarsi di ruolo ma danno lo stesso risultato se x é stazionario

2 L'autocorrelazione in τ = 0 dà la potenza di ***x(t)*** $$\boxed{P_x = R_x(0)}$$

infatti $P_x = \mathcal{R}_x(0)$ e $R_x = \mathcal{R}_x$ se ***x*** é ergodico. Inoltre, se ***x*** ha valor medio *0* il valore quadratico medio $E\left[x^2\right] = R_x(0)$ coincide con la sua varianza: $$\boxed{P_x = \sigma_x^2}$$

3 L'autocorrelazione assume il suo valore massimo per τ = 0: $$\boxed{\left|R_x(\tau)\right| \le R_x(0) \quad \forall \tau}$$

Densità spettrale di potenza (definizione)

La **densità spettrale di potenza** di un processo casuale stazionario *x(t)* è definita come la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione $R_x(\tau)$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)\,d\tau \quad \Longleftrightarrow \quad R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\exp(j2\pi f\tau)\,df$$

Perché $S_x(f)$ è una densità spettrale di potenza?

1 - Come si è visto l'autocorrelazione in $\tau = 0$ è, per un processo ergodico, uguale alla potenza associata ad una realizzazione:

$$R_x(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt = P_x$$

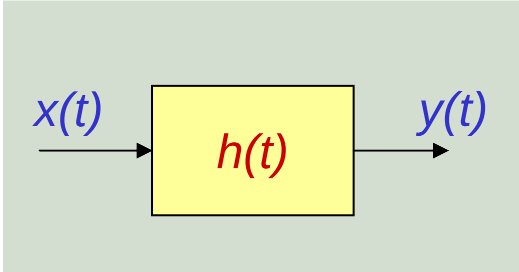
2 - L'autocorrelazione in $\tau = 0$ è anche uguale all'integrale della sua TDF:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df = P_x$$

L'integrale della **densità spettrale di potenza** è quindi la potenza del processo *x(t)*. Si vedrà presto che $S_x(f)$ ha anche un significato fisico a ciascuna frequenza.

Processi casuali attraverso sistemi LTI

Se un processo casuale *x(t)* stazionario passa attraverso un sistema LTI con risposta all'impulso *h(t)* reale e risposta in frequenza *H(f)*, il processo casuale in uscita *y(t)* è stazionario ed ha le seguenti caratteristiche:



1 - Il valor medio del processo in uscita è dato da:

$$m_y = E[y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau\right] = m_x H(0)$$

2 - L'autocorrelazione del processo in uscita è data da:

$$R_y(\tau) = E\left[\left(x(t)*h(t)\right)\left(x(t+\tau)*h(t+\tau)\right)\right] = \ldots = R_x(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$$

3 - La densità spettrale di potenza del processo in uscita è quindi data da:

$$S_y(f) = S_x(f)H(f)H(-f) = S_x(f)\left|H(f)\right|^2$$

4 - In generale la densità di probabilità ddp_y del processo in uscita *y(t)* è diversa dalla ddp_x dell'ingresso *x(t)*, e non semplice da calcolare. Solo la *densità di probabilità gaussiana* rimane tale nel passaggio attraverso sistemi lineari.

Densità spettrale di potenza (significato fisico)

Si supponga che il processo casuale *y(t)* sia ottenuto da *x(t)* attraverso un filtro ideale passa banda centrato sulla frequenza f_o con piccola banda Δf . Si può ben dire che *y(t) contiene le sole frequenze di x(t) nella banda del filtro, cioè in un intorno di* f_o ! Se Δf è sufficientemente piccolo si ha

$$\boxed{S_y(f) = S_x(f_o) \quad \text{per} \quad f_o - \Delta f / 2 < f < f_o + \Delta f / 2}$$

La potenza di *y(t)*, cioè la potenza di *x(t)* nella banda Δf , è data da

$$\boxed{P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)df = S_x(f_0)\Delta f}$$

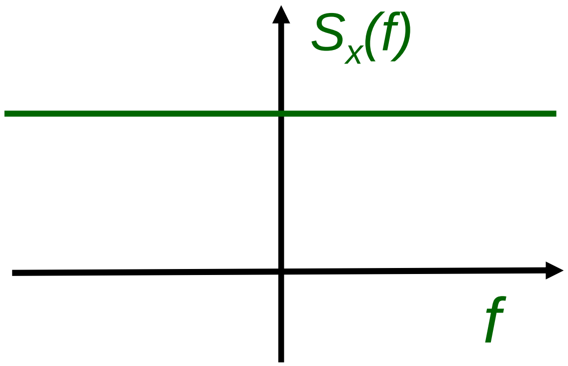
Dunque $S_x(f_0)$ ha effettivamente il significato di potenza per unità di banda in un intorno di f_0, cioè di densità spettrale di potenza. Nota: l'aggettivo "spettrale" viene usato per indicare tutto ciò che si riferisce al "dominio" delle frequenze.

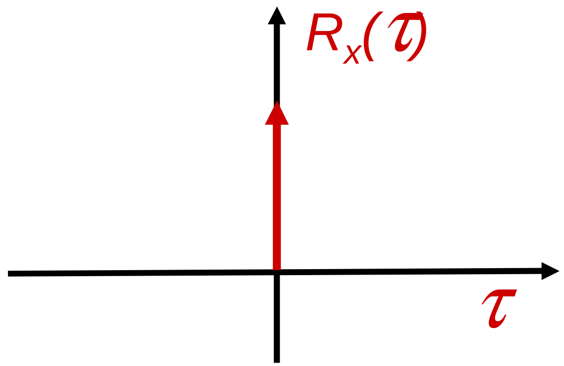
IMPORTANTE: la densità spettrale di potenza non può essere negativa (a nessuna frequenza: filtrando si otterrebbe un processo *y(t)* con potenza negativa!!)

Processi casuali bianchi (1)

Si dice **bianco** un **processo casuale** con **densità spettrale di potenza costante**. Quindi un **processo casuale bianco** ha **autocorrelazione impulsiva**.

Si tratta, evidentemente, di una idealizzazione (anche la luce che diciamo “bianca”, da cui deriva il nome, ha spettro che non si estende all’infinito). Notiamo che un processo veramente bianco avrebbe potenza infinita!
Nel mondo reale osserviamo solo processi filtrati (con banda più o meno larga). Se la banda del processo in ingresso è più larga di quella del filtro, possiamo assegnare valori arbitrari alla densità spettrale fuori banda (senza che cambino i risultati del calcolo). Un valore costante è il più comodo dal punto di vista matematico.





Nota: l’autocorrelazione impulsiva significa che il valore $x(t+\tau)$ del processo bianco al tempo $t+\tau$ è assolutamente impredicibile dal valore $x(t)$ all’istante t: il processo varia in modo infinitamente rapido!

Processi casuali bianchi (2)

Solitamente la densità spettrale di un processo casuale *x(t)* **bianco** viene indicata con $S_x(f)=N_0/2$ e quindi la funzione di autocorrelazione con $R_x(\tau)= N_0/2\ \delta(\tau)$.

E' importante saper calcolare la potenza di un processo *y(t)* ottenuto da un processo bianco *x(t)* attraverso un filtro con risposta all'impulso *h(t)* e risposta in frequenza *H(f)*. Si ha

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\left|H(f)\right|^2 df =$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)\right|^2 df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt$$

Nota: un risultato del tutto analogo si ottiene se si calcola la varianza di una variabile casuale *y* ottenuta come somma pesata, con pesi *w(t)*, dei valori del processo *x(t)*:

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t)dt \quad \longrightarrow \quad \sigma_y^2 = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|W(f)\right|^2 df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w^2(t)dt$$

Densità spettrali di potenza e di energia

Segnali ad energia finita

definizione; teorema di Parseval

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \Rightarrow \quad |X(f)|^2 = G_x(f)$$

DENSITA' SPETTRALE DI ENERGIA

Segnali periodici (segnali a potenza finita)

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \Rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) = S_x(f)$$

coeff. dell'espansione in serie di Fourier

DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

Processi casuali stazionari ed ergodici

definizione; ergodicità; stazionarietà; proprietà della TDF

$$P = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = E\left[x^2(t)\right] = R_x(\tau)\Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\, df$$

$$S(f) = \Im\left[R(\tau)\right]$$

DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

Esercizi

1. Se $x(t)$ è un processo casuale stazionario a valor medio nullo, con funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$, qual'è il valor medio di $x(t_1)x(t_2)$?

2. Se $x(t)$ é un processo casuale stazionario a valor medio nullo, con funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ e densità spettrale di potenza $S_x(f)$, quali sono l'autocorrelazione e la densità spettrale di potenza di $y(t) = x(t-T)$? **Suggerimento**: si parta dalla funzione di autocorrelazione $R_y(\tau)$. **Commento**: è una conseguenza della stazionarietà a del processo.

3. Se $x(t)$ e $y(t)$ sono processi casuali a valor medio nullo, indipendenti (e quindi incorrelati), con funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ e $R_y(\tau)$ e densità spettrali di potenza $S_x(f)$ e $S_y(f)$ qual'è la densità spettrale di potenza della loro somma $z(t) = x(t) + y(t)$? **Suggerimento**: si calcoli la funzione di autocorrelazione $R_z(\tau)$. **Commento**: si usa dire che processi incorrelati si sommano in potenza.

4. Se $x(t)$ è un processo casuale stazionario a valor medio nullo, con funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ e densità spettrale di potenza $S_x(f)$, quali sono l'autocorrelazione e la densità spettrale di potenza di $y(t) = x(t) + x(t-T)$? **Suggerimento**: si calcoli la funzione di autocorrelazione $R_y(\tau)$, oppure si individui il sistema LTI che produce $y(t)$ come uscita. **Verifica**: si ponga $T = 0$ e si verifichi che $R_x(0)$ e $R_y(0)$ siano nel giusto rapporto.

5. $x(t)$ è un processo casuale bianco, a volar medio nullo, con densità spettrale di potenza (bilatera) $N_0/2$. Si calcoli la varianza della variabile casuale $y = \int_0^T x(t)dt$. **Suggerimento**: y può essere considerato l'integrale del prodotto di $x(t)$ e di un rettangolo di durata T.

6. $x(t)$ è un processo casuale bianco con densità spettrale di potenza (bilatera) $N_0/2$. Si calcoli la varianza della variabile casuale $y = \int_{-T}^{T} x(t)\left(1-|t|/T\right)dt$. **Suggerimento**: $\left(1-|t|/T\right)$ corrisponde a un triangolo di energia...