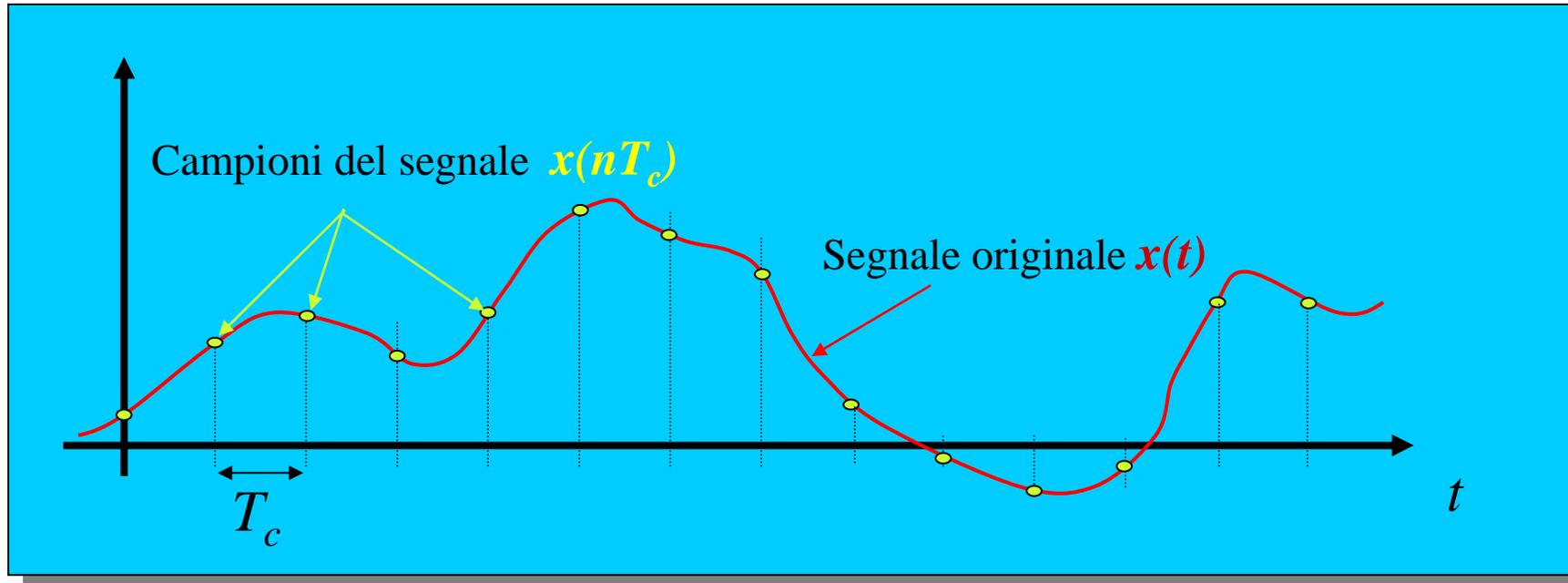


The image displays three distinct waveforms. The top waveform is orange and shows a complex, multi-peaked signal with a prominent central peak. The bottom-left waveform is blue and exhibits a sharp initial peak followed by several smaller, irregular oscillations. The bottom-right waveform is yellow and shows a similar multi-peaked structure to the orange waveform but with a different amplitude and phase. The central text is bold and underlined.

QUANTIZZAZIONE E CONVERSIONE
IN FORMA NUMERICA

Campionamento e quantizzazione di un segnale analogico

Si consideri il segnale $x(t)$ campionato con passo T_c .



Ogni campione del segnale campionato $x(nT_c)$ è un **numero reale che può assumere con continuità qualsiasi valore compreso tra un minimo e un massimo.**

Se si vuole rappresentare ogni campione $x(nT_c)$ in forma numerica (ad esempio per memorizzarlo in forma binaria su un PC) è necessario **approssimare** il numero reale **con un numero finito M_Q di livelli compresi tra il minimo e il massimo.**

Questa operazione viene detta **quantizzazione.**

Quantizzazione

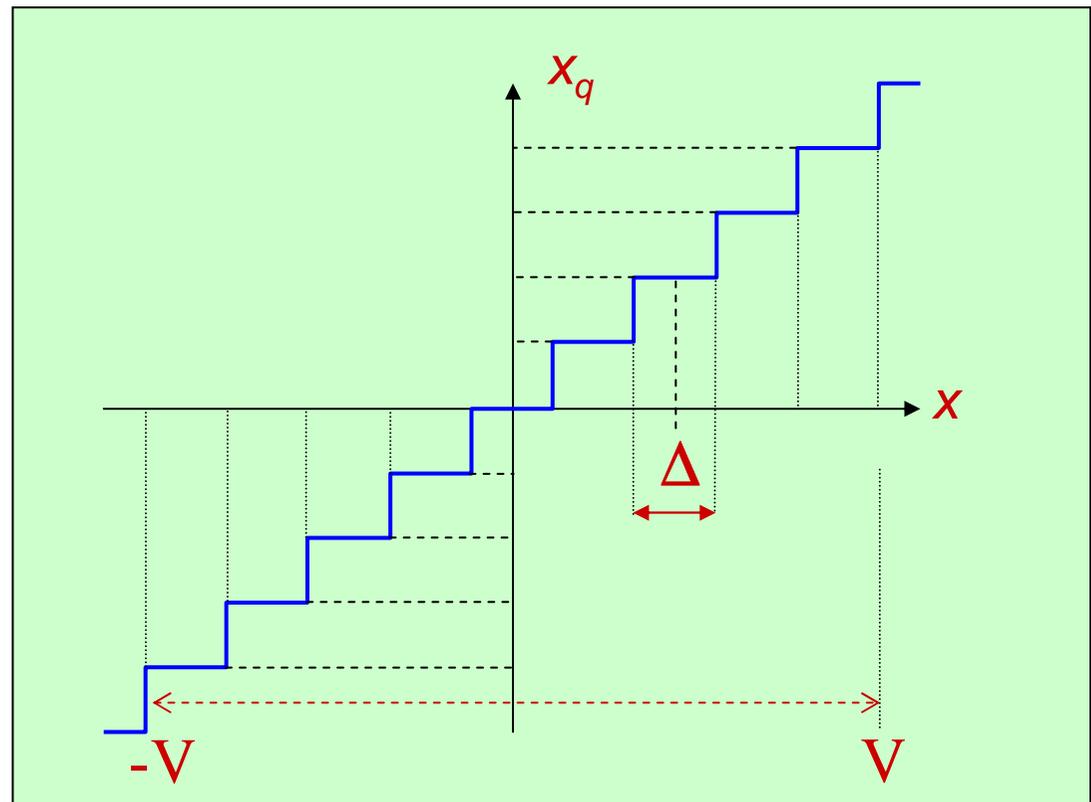
Il quantizzatore è un dispositivo che trasforma il campione reale $x(nT_c)$ nel campione quantizzato con un numero M_Q di livelli $x_q(nT_c)$.



Ad esempio se il minimo e il massimo valore che può assumere il campione $x(nT_c)$ sono $-V$ e V , la relazione tra il valore continuo $x(nT_c)$ e quello quantizzato $x_q(nT_c)$ è rappresentata da una scalinata con M_Q livelli: $x_q(nT_c)$ sarà il valore centrale dell'intervallo in cui cade il campione $x(nT_c)$

L'intervallo di quantizzazione Δ è (nel caso di intervalli di ugual ampiezza):

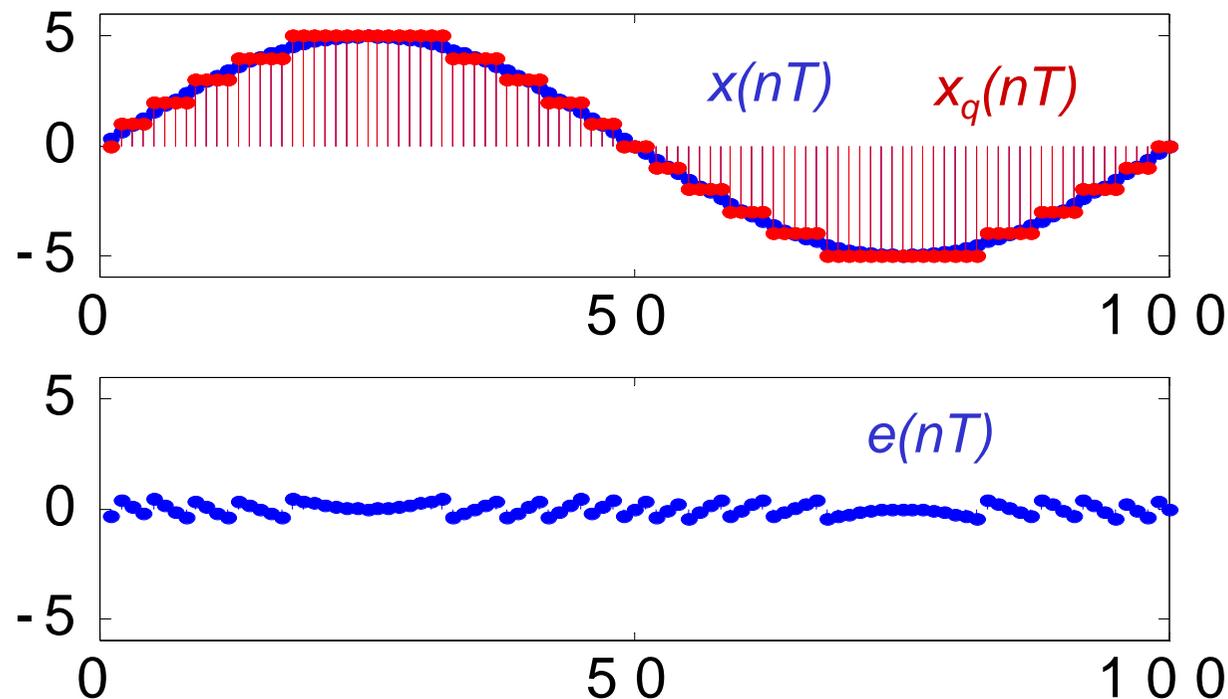
$$\Delta = \frac{2V}{M_Q}$$



Errore di quantizzazione

Quantizzando si commette un errore tanto più piccolo quanto più elevato è il numero M_Q di livelli. L'errore di quantizzazione è :

$$e(nT_c) = x_q(nT_c) - x(nT_c)$$

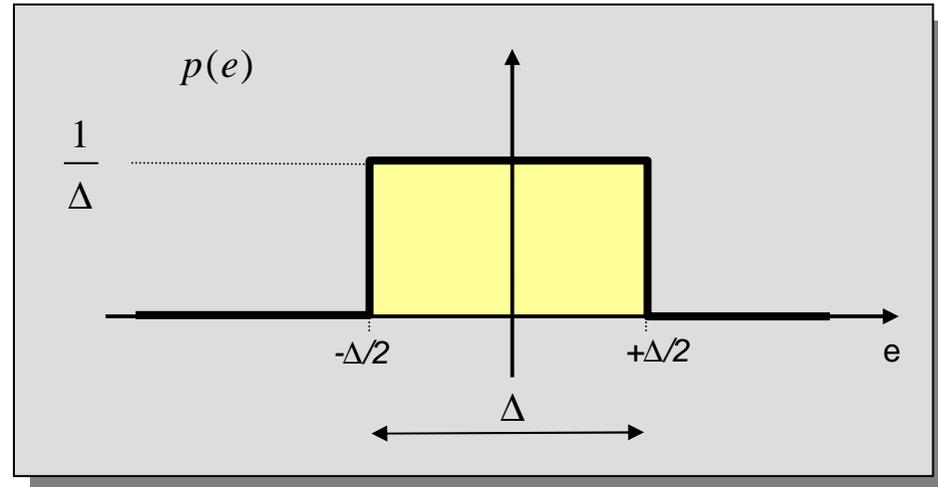


Se il numero M_Q di livelli è elevato, e quindi gli intervalli di quantizzazione sono piccoli, il modello più sensato per l'errore di quantizzazione di un campione, è una variabile casuale **con valor medio nullo** e densità di probabilità uniforme tra $-\Delta/2$ e $+\Delta/2$.

Ddp dell'errore di quantizzazione

Si dice che una variabile casuale é distribuita uniformemente se la sua ddp é costante (uniforme) entro un dato intervallo di ampiezza Δ :

$$p_e(e) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}\left(\frac{e}{\Delta}\right)$$



Valor medio e varianza dell'errore e valgono:

$$E[e] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e \frac{1}{\Delta} de = \left[\frac{e^2}{2\Delta} \right]_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} = 0$$

$$\sigma_e^2 = E[e^2] = \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \left[\frac{e^3}{3\Delta} \right]_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} = \frac{\Delta^2}{12}$$

La varianza di e aumenta all'aumentare dell'ampiezza Δ dell'intervallo di quantizzazione (distribuzione meno raccolta intorno al valor medio)

Varianza dell'errore di quantizzazione

Dunque l'errore di quantizzazione è una variabile casuale con valor medio nullo e con varianza uguale a:

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \left(\frac{2V}{M_Q}\right)^2 \frac{1}{12} = \frac{V^2}{3M_Q^2} = P_Q$$

ed è pari alla potenza del rumore di quantizzazione P_Q , in quanto il valor medio di $e(nT_c)$ è nullo. Se si utilizzano N_Q cifre binarie per rappresentare i campioni si ha:

$$M_Q = 2^{N_Q} \Rightarrow \sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{V^2}{3} \frac{1}{2^{2N_Q}} = \frac{V^2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{N_Q}$$

Per ogni cifra binaria aggiunta la varianza dell'errore di quantizzazione si riduce di 4 volte (cioè si riduce di 6 dB).

Rapporto Segnale - Rumore di quantizzazione

Il rapporto segnale - rumore di quantizzazione, solitamente espresso in dB è

$$SNR_Q = 10 \log_{10} \left(\frac{P_s}{P_Q} \right)$$

Dove P_s è la potenza del segnale $x(t)$ che, ignoto a priori, è un processo a sua volta.

Esempio:

Se anche per $x(t)$ assumiamo una ddp uniforme (tra $-V$ e V), il suo valor medio è nullo, e quindi la sua potenza coincide con la sua varianza:

$$P_s = E[x(t)^2] = \sigma_x^2 = \frac{(2V)^2}{12} = \frac{V^2}{3} \Rightarrow$$

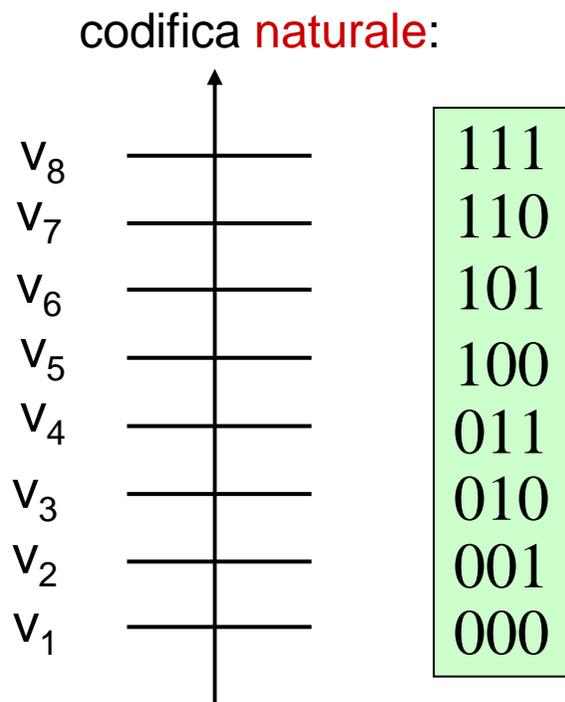
$$SNR_Q = 10 \log_{10} \left(2^{2N_Q} \right) = 6N_Q \quad [dB]$$

Codifica dei campioni quantizzati

Con N_Q cifre binarie (*bit*) si ottengono $M_Q = 2^{N_Q}$ livelli di quantizzazione. Ad ogni livello si può dunque associare un **codice** di N_Q bit.

Ad esempio se $N_Q=3$ sono disponibili $M_Q = 8$ livelli di quantizzazione V_m codificabili (in vario modo) con **3** bit.

In pratica un unico dispositivo, detto convertitore analogico-digitale, campiona il segnale, individua l'intervallo in cui cade il campione e ne dà la codifica binaria:



Ritmo di trasmissione richiesto

La **cadenza in bit al secondo** di un segnale numerico viene chiamata ritmo di trasmissione (*bit rate*).

Ad esempio per un segnale tempo continuo $x(t)$ con frequenza massima di **3.6 kHz (segnale vocale di qualità telefonica)** il teorema del campionamento richiede una frequenza di campionamento f_c maggiore di **7.2 kHz**. Si utilizza la frequenza di campionamento $f_c = 8 \text{ kHz}$ (**8000 campioni al secondo**).

Se si quantizza il segnale con $M_Q=256$ livelli occorrono $N_Q=8$ bit per campione. Il segnale telefonico in forma numerica richiede quindi un ritmo di trasmissione:

$$N_Q f_c = 8 \cdot 8000 = 64 \text{ kb/s}$$

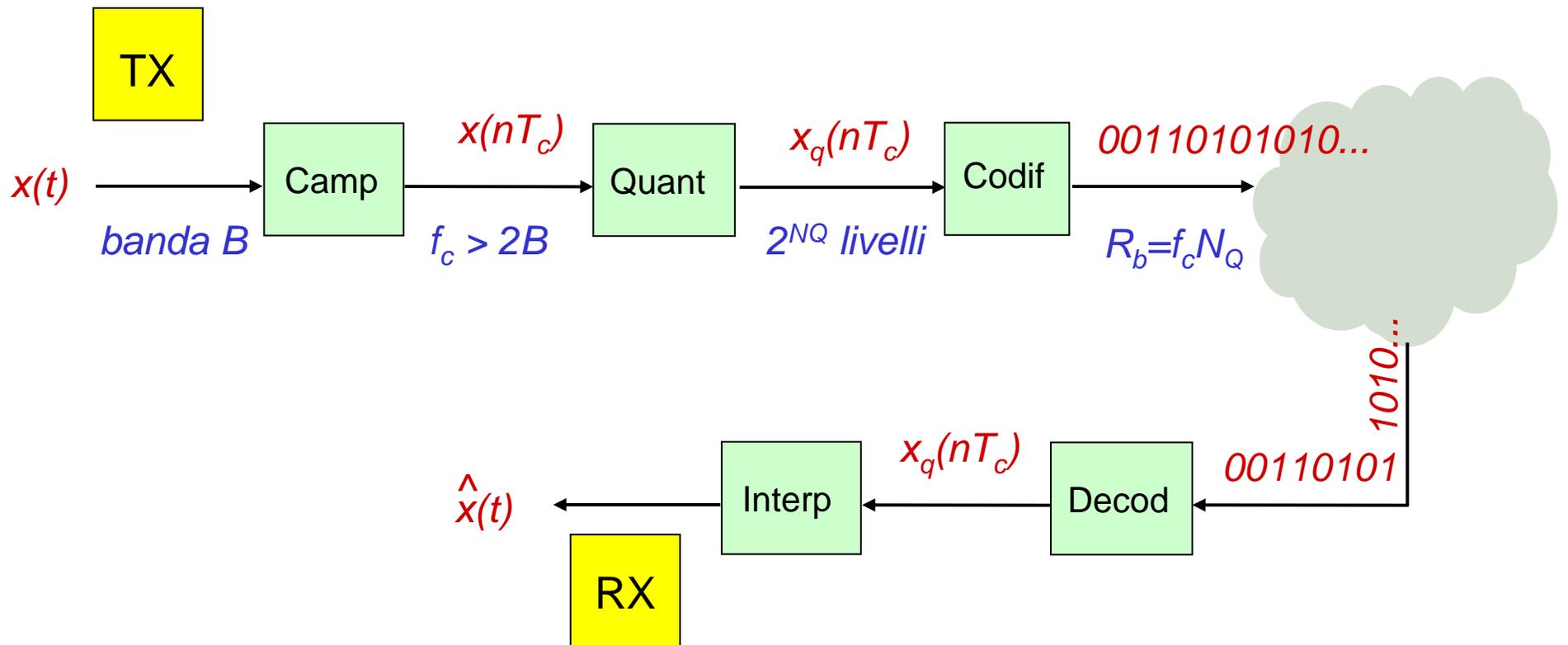
Nello standard CD audio, il singolo canale (mono) ha $f_c=44.1 \text{ kHz}$, e i campioni sono codificati su $N_Q=16$ bit per campione:

$$N_Q f_c = 16 \cdot 44.1 \cong 705 \text{ kb/s}$$

Trasmissione del segnale numerico (1)

Un segnale numerico ottenuto a seguito di campionamento e quantizzazione è una **sequenza di bit** con un certo ritmo (il *bit rate*):

.....1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0



Trasmissione del segnale numerico (2)

A questo punto si può dimenticare il segnale originale ed anche il fatto che i bit debbano essere letti a gruppi di N_Q , con un opportuno sincronismo di trama, per risalire ai campioni del segnale quantizzato $x_q(nT)$. Alla sequenza numerica si aggiungeranno (in piccola quantità) opportuni segnali di sincronismo.

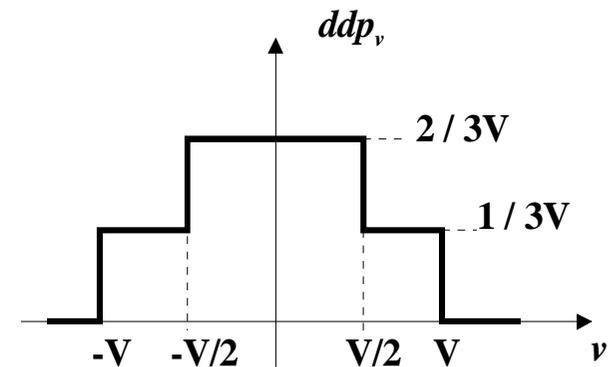
Si deve poi trasmettere la sequenza, alla sua *cadenza*, attraverso un canale di trasmissione (*satellite, ponte radio, cavo coassiale, fibra ottica, ...*). Il canale lascia passare solo segnali $y(t)$ che hanno frequenze comprese in una banda B_c a partire da frequenza nulla (canale passa basso) oppure centrata attorno ad una frequenza f_o (canale passa banda). Si dovranno associare ai bit opportune sequenze di forme d'onda, che occupino la banda consentita dal canale.

I bit possono essere inviati sul canale uno per volta (trasmissione binaria) oppure a blocchi (trasmissione multilivello; in questo caso ogni forma d'onda trasporta più di un bit).

Esercizi

1) Un segnale di banda 8 kHz, con distribuzione uniforme tra -5 V e 5 V è campionato a 20 kHz e convertito in formato numerico. Determinare il numero di bit per campione necessari a garantire un rapporto segnale-rumore di quantizzazione di 30 dB, ed il conseguente *bit rate* da inviare sul canale.

2) E' dato un segnale analogico $v(t)$ con distribuzione dell'ampiezza $ddp_v(v)$ rappresentata in figura. Il segnale viene campionato, quantizzato su intervalli uniformi e convertito in formato numerico.



Con 8 bit/campione quanto risulta essere il rapporto segnale/rumore di quantizzazione (assumendo rumore uniforme in ogni intervallo) SNR_Q ? Quale sarebbe se il segnale fosse distribuito uniformemente nello stesso intervallo $(-V, +V)$?