Laboratorio di Fondamenti di Segnali e Trasmissione

Alessandro Tomasoni

Esercitazione n.2 del 7/4/2009

La Trasformata di Fourier (TDF)

Abbiamo visto a lezione che ad un segnale x(t) funzione del tempo, si può associare una funzione X(f), funzione della frequenza che serve a descrivere x(t) come combinazione lineare di esponenziali complessi. L'operatore che calcola X a partire da x si chiama Trasformata di Fourier (TDF):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\ dt \tag{1}$$

Esiste anche l'operatore Trasformata di Fourier Inversa (TDFI) che da X permette di calcolare x

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\ df \tag{2}$$

Oggi vedremo come calcolare numericamente con SCILAB le TDF e TDFI. La cosa ci tornerà soprattutto utile per tutti quei casi in cui il calcolo analitico degli integrali (1) e (2) é proibitivo.

La TDF con SCILAB

In SCILAB, al solito, non possiamo che approssimare segnali continui tramite sequenze. Ci accontenteremmo pertanto di poter calcolare, a partire dalla sequenza $x(nT)$, una sequenza $X(k\nu)$ che descrive la X(f) su un vettore di punti equispaziati in frequenza con passo ν. Come prima cosa dovremo approssimare l'integrale (1) con una sommatoria; tale somma sarà poi finita in quanto il segnale $x(t)$, avendo durata limitata (p.e. supponiamo da 0 a NT), sarà rappresentato tramite un vettore di N campioni:

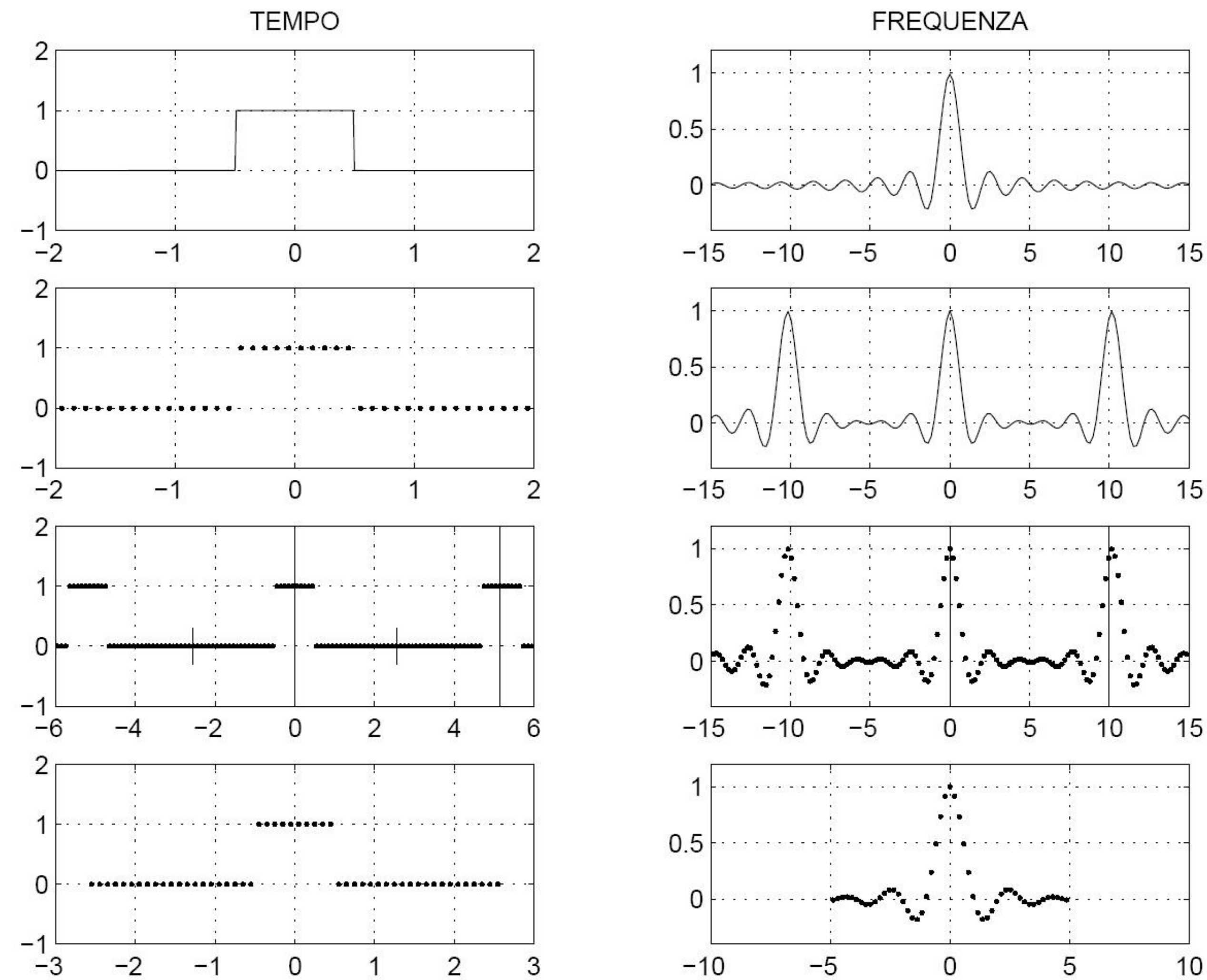
$$X(k\nu) \cong \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\, e^{-j2\pi(k\nu)(nT)} \cdot T = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\, e^{-j2\pi(k\nu)(nT)} \cdot T \tag{3}$$

Successivamente dovremo chiederci quale passo in frequenza ν ci interessa, e se l'approssimazione dell'integrale con una somma finita genera un errore trascurabile oppure no. I gradi di libertà a nostra disposizione saranno il passo di discretizzazione nei tempi T, e l'intervallo NT su cui osserviamo il segnale x nel tempo.
L'operazione (3) possiamo implementarla facilmente in SCILAB. Conviene però sfruttare una funzione predefinita SCILAB **fft**, che implementa (in modo efficiente, *fast*) la Trasformata Discreta di Fourier di una sequenza x_n, che abbiamo visto a lezione:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\ e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} \tag{4}$$

Per calcolare la (3), é sufficiente applicare la (4) alla sequenza $x(nT)$, e moltiplicare per T: si ottiene la lettura di $X(k\nu)$ con $\nu=1/NT$. Infatti, come abbiamo visto a lezione, la Trasformata Discreta di Fourier, si basa sul fatto che sequenze di impulsi con passo T, periodiche di periodo NT, hanno come trasformate sequenze di impulsi di passo $1/NT$, periodiche di periodo $1/T$. La funzione SCILAB X=*fft*(x) sfrutta questa proprietà; riceve la sequenza x e la interpreta come porzione minima di una sequenza periodica, cioè osservata su un solo periodo: ne calcola la trasformata, anch'essa una sequenza periodica, di cui restituisce l'osservazione su un solo periodo, la sequenza X.
Per calcolare numericamente una TDFI (2) si procederà in modo assolutamente analogo, approssimandola con una somma finita. Potremo poi sfruttare la funzione SCILAB **ifft** che implementa la Trasformata Discreta di Fourier Inversa:

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k\ e^{j2\pi\frac{kn}{N}} \tag{5}$$



NOTA: La convenzione assunta da **fft** e **ifft** é che il primo campione di x, x(1), è quello che corrisponde a t=0 e che il primo campione di X, X(1) è quello che corrisponde a f=0.

Operativamente, definiamo al solito il vettore tempo e calcoliamo il segnale nel tempo, con passo dt:

```
--> t=t0:dt:tf;
--> x=funzione_x(t);
```

Supponiamo siano entrambe sequenze lunghe N. Occorre "simulare" la versione periodica di x e prenderne la finestra tra t=0 e t=(N-1)dt: chiamiamo questa sequenza *xshift*. Occorre individuare il campione che corrisponde a t=0:

```
--> N=length(x);
--> i0=find(t==0);
--> xshift=[x(i0:N) x(1:(i0-1))];
```

Applicando la FFT a xshift e moltiplicando per dt otteniamo la sequenza di X(f) campionata, periodicizzata, e nella finestra da 0 a 1/dt Hz:

```
--> Xshift=fft(xshift)*dt;
```

esiste la funzione SCILAB fftshift che sposta la finestratura da -1/2dt a 1/2dt:

```
--> X=fftshift(Xshift);
```

Ora rimane solo da definire il vettore delle frequenze associato a X. Per fare ciò occorre calcolare il passo di campionamento in frequenza ν, e poi accettare la convenzione di fftshift, che in caso di lunghezza pari della sequenza assegna un campione in più alle frequenze negative:

```
--> v=1/N/dt;
--> f=(-N/2+(0:N-1))*v;
```

altrimenti, se N é dispari, si ha un ugual numero di campioni per le frequenze positive e negative:

```
--> f=(-(N-1)/2+(0:N-1))*v;
```

Ora possiamo visualizzare il risultato; ricordate che X sarà sempre un vettore complesso:

```
--> plot(f,abs(X));
```

```
function a=angle(c)
   a=atan(imag(c),real(c))
endfunction
```

```
--> plot(f,angle(X));
```

Oppure

```
--> plot(f,real(X));
--> plot(f,imag(X));
```

Per l'antitrasformazione, si procede in maniera analoga a partire dalla coppia f,X:

```
--> N=length(X);
--> i0=find(f==0);
--> Xshift=[X(i0:N) X(1:(i0-1)];
```

Notate solo che è richiesta una moltiplicazione per N in più in quanto nella **ifft** (5), la somma é divisa per *N*:

```
--> xshift=ifft(Xshift)*N*v;
--> x=fftshift(xshift);
--> dt=1/N/v;
--> t=(-N/2+(0:N-1))*dt;   % se N pari
--> t=(-(N-1)/2+(0:N-1))*dt;   % se N dispari
```

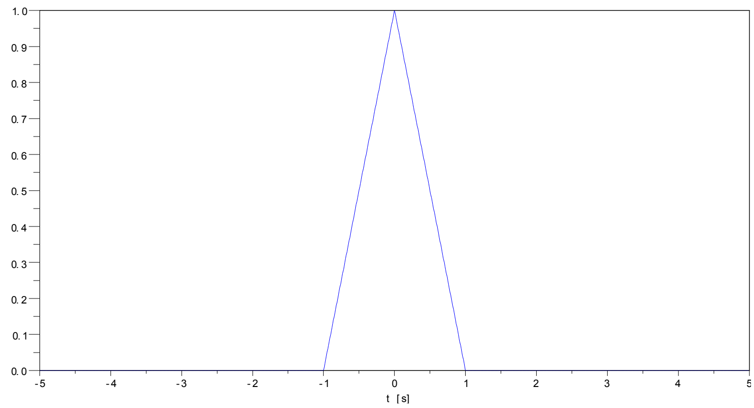
Osservazione 1

- Il primo grado di libertà che abbiamo a disposizione è il passo dt. Tale passo deve essere sufficientemente piccolo, paragonato alle proprietà del segnale che si trasforma per ragioni legate al teorema del campionamento. Infatti, la sequenza X(f) che ottenete è in realtà “sporcata” ai bordi dalle repliche dello spettro che sono state rimosse, ma hanno lasciato tracce del loro effetto. Diminuire dt significa distanziare le repliche dello spettro, e quindi mitigare questi effetti.
  OPERATIVAMENTE: dt va diminuito fino a che la sequenza X non decresce bene a zero ai bordi.

Esempio: segnale triangolo tra –1 e 1 s, ampiezza 1.

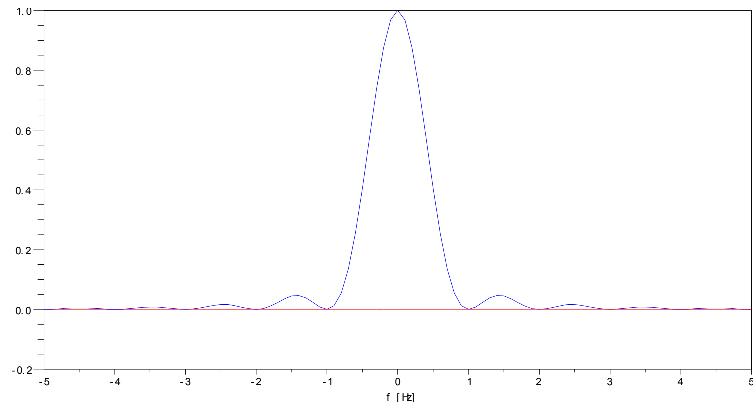
Iniziamo con un intervallo di osservazione di 10 s con un passo di campionamento dt = 10 ms. Questa scelta corrisponde ad una spaziatura degli spettri di 100 Hz (e ad un intervallo di discretizzazione in frequenza di 0.1 Hz).

```
--> dt=0.01;
--> t=-5:dt:5-dt;
--> x=tri(t);
--> plot(t,x)
```



Ora trasformiamo questo segnale come abbiamo imparato:

```
--> N=length(x);
--> i0=find(t==0);
--> xshift=[x(i0:N) x(1:i0-1)];
--> Xshift=fft(xshift)*dt;
--> X=fftshift(Xshift);

--> v=1/N/dt;
--> f=(-N/2+(0:N-1))*v;
--> plot(f,real(X),'b-')
--> plot(f,imag(X),'r-')
```



Notiamo che la parte immaginaria di X è in realtà nulla. Ce lo potevamo aspettare? Sì, perché x(t) è pari.
Notiamo anche che la parte reale è nulla oltre, diciamo, i 5 Hz.

E’ chiaro che con uno spettro così, praticamente nullo oltre i 5 Hz, l’intervallo *dt* che abbiamo scelto è di gran lunga sufficiente. La sua replica traslata è centrata a 100 Hz, e quindi la sua influenza intorno a f=0 è inesistente.
Ma che cosa sarebbe successo se avessimo preso un passo di campionamento più ampio? Sembra evidente che anche una replica traslata a 10 Hz non dia ancora nessun effetto. Potremmo iniziare a vedere una differenza, se avessimo una replica a 5 Hz. Questo corrisponderebbe a:

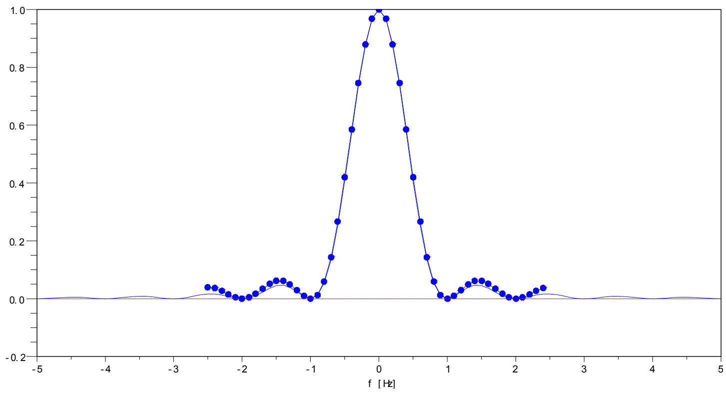
```
--> dt=1/5

dt =
    0.2000
```

Proviamo a vedere cosa succede. Vogliamo mantenere lo stesso intervallo di osservazione di 10 s. Confrontiamolo con il vecchio segnale:

```
--> t=-5:dt:5-dt;
--> x=tri(t);
```

Trasformiamo:

```
--> N=length(x);
--> i0=find(t==0);
--> xshift=[x(i0:N) x(1:i0-1)];
--> Xshift=fft(xshift)*dt;
--> X=fftshift(Xshift);
--> v=1/N/dt;
--> f=(-N/2+(0:N-1))*v;
--> plot(f,real(X),'b.-')
```



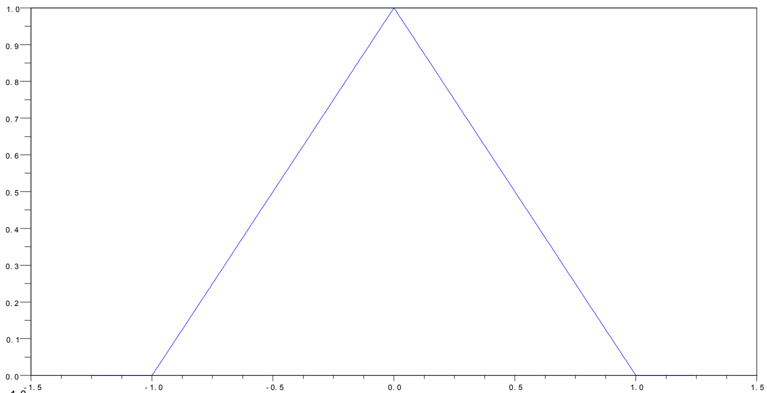
Come si può notare l’intervallo di osservazione si limita a ±1/2dt = ±2.5 Hz. Inoltre, l’effetto dello spettro adiacente rimosso si fa sentire, infatti la trasformata differisce leggermente da quella più precisa, calcolata precedentemente, sui lobi laterali. Operativamente, come vi dicevo, ce ne accorgiamo facilmente, perché ora la nostra X(f) non va a zero ai bordi.

Osservazione 2

- L'altro grado di libertà è il numero di campioni N di lunghezza del segnale. Infatti, indipendentemente dalla durata di x (cioè dall'intervallo temporale in cui x è diverso da zero), noi possiamo ampliare il range del vettore t: a questi nuovi valori corrisponderanno campioni nulli di x. N impatta sul passo di discretizzazione delle frequenze ν, e quindi sull'accuratezza con cui la sequenza X descrive la funzione continua X(f). Notate la dualità: aumentare N significa spaziare maggiormente le repliche nel tempo e ridurre il passo in frequenza ν; ridurre *dt* (passo di discretizzazione nel tempo) significa spaziare maggiormente le repliche nelle frequenze.

Esempio: con lo stesso segnale di prima, proviamo a risparmiare campioni limitando l'osservazione del triangolo a poco più della sua durata. Se teniamo dt = 10 ms, il triangolo dura 250 campioni:

```
--> dt=0.01;
--> t=-1.25:dt:1.25-dt;
--> x=tri(t);
```

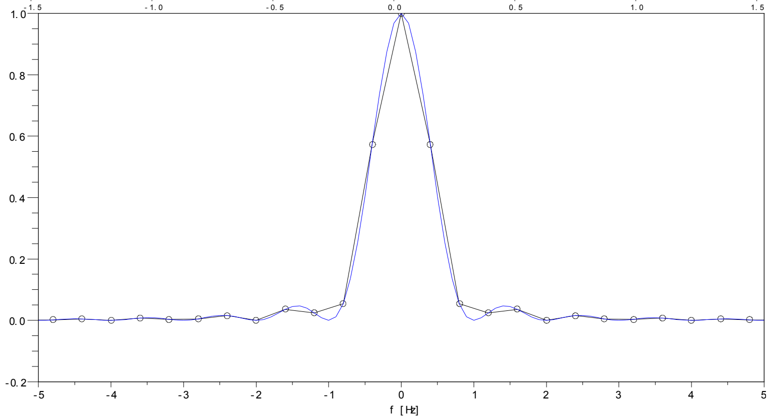


osserviamo la sequenza x:

```
--> figure(1);
--> plot(t,x);
```

Ha lo stesso dt di prima ma l'osservazione dura circa un quarto del tempo. Trasformiamo x e sovrapponiamone il grafico alla vecchia X:

```
--> N=length(x);
--> i0=find(t==0);
--> xshift=[x(i0:N) x(1:i0-1)];
--> Xshift=fft(xshift)*dt;
--> X=fftshift(Xshift);
--> v=1/N/dt;
--> f=(-N/2+(0:N-1))*v;
--> figure(0);
--> plot(f,real(X),'ko-')
```



Come si può notare, i punti coincidono perfettamente con quelli della X precedente, ma sono più radi: per la precisone ne abbiamo uno ogni 4, visto che N è stato ridotto ad un quarto (da 1000 a 250). In questo caso quello che si perde è l'accuratezza nella descrizione della X(f) (provate a fare il plot di questa X da sola), ma non ci sono errori.

ESERCIZI

1. calcolate le TDF dei seguenti segnali, scegliendo un passo nel tempo, ed un intervallo di osservazione opportuno. Verificatene la correttezza confrontandoli con l'espressione analitica. Se necessario, riducete il passo.
   - $x_1(t) = tri(2t)$;
   - $x_2(t) = tri(t/2)$;
   - $x_3(t) = tri(t)*tri(t)$;

2. calcolate le TDF di una gaussiana non ritardata

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-t^2/2a^2}$$

   con $a^2=1/2\pi$, sull'intervallo da –2 a 2 secondi, con passo opportuno. Verificatene la correttezza confrontandola con l'espressione analitica.

3. calcolate la TDF del segnale

$$x(t) = \begin{cases} (\sin(5\pi t) + 2\sin(2\pi t))^2 & 0 < t < 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

   utilizzato negli esempi di convoluzione. Verificate la banda di X(f), che avevamo assunto a circa 5 Hz.

4. utilizzando coppie x <=> X a vostra scelta (ma opportune), verificate le proprietà della TDF:
   - se x reale e pari => X...
   - se x reale dispari => X...
   - $x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,df$ (*)
   - $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$ (*)
   - x(t-t0) <=> ?
   - dx(t)/dt <=> ?
   - x(t)y(t) <=> ?
   - $x(t) * y(t)$ <=> ?
   - Teorema di Parseval (*)

(*) Il calcolo di $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$, $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,df$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df$ si può approssimare, al solito, con **sum(x)*dt** e **sum(X)*f** e **sum(abs(X).^2)*f,** rispettivamente.