Fondamenti di Segnali e Trasmissione

SOLUZIONE SESTO ESERCIZIO PROPOSTO DEL 29/5/2009

Viene richiesto il calcolo della varianza della variabile:

$$\bar{y} = \int_{-T}^{T} x(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt$$

dove $x(t)$ è un processo casuale stazionario, con valor medio nullo e autocorrelazione impulsiva:

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Risolviamo l'esercizio in due modi differenti.

SOLUZIONE 1

Utilizziamo le definizioni di valor medio e varianza:

$$E[\bar{y}] = E\left[\int_{-T}^{T} x(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt\right] \underset{(a)}{=} \int_{-T}^{T} \underbrace{E[x(t)]}_{=0}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt = 0$$

Dove (a) vale per la linearità del valor medio. Segue:

$$Var(\bar{y}) = E[\bar{y}^2] - E[\bar{y}]^2 = E[\bar{y}^2] = E\left[\left(\int_{-T}^{T} x(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt\right)^2\right]$$

A questo punto potremmo scrivere l'argomento del valor atteso come il prodotto di due integrali. ATTENZIONE però! Come già segnalato durante l'esercitazione, è fondamentale eseguire *prima* i due integrali separatamente, *poi* calcolare il valore atteso del loro prodotto. Risulta quindi obbligatorio indicare le due variabili d'integrazione con nomi diversi! Chi non facesse così, poi si troverebbe in serie difficoltà (cosa significa integrare $x(t)^2$ due volte rispetto alla stessa variabile t in dt^2? Boh!). Procediamo quindi con due variabili d'integrazione diverse e sfruttiamo nuovamente la linearità dell'integrale per mettere in evidenza l'autocorrelazione del processo $x(t)$:

$$Var(\bar{y}) = E\left[\int_{-T}^{T} x(t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt \cdot \int_{-T}^{T} x(t')\left(1-\frac{|t'|}{T}\right)dt'\right] = E\left[\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t')\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\left(1-\frac{|t'|}{T}\right)dtdt'\right] =$$

$$= \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \underbrace{E[x(t)x(t')]}_{R_x(t'-t)}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\left(1-\frac{|t'|}{T}\right)dtdt' = \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \frac{N_0}{2}\delta(t'-t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\left(1-\frac{|t'|}{T}\right)dtdt' =$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \delta(t'-t)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\left(1-\frac{|t'|}{T}\right)dtdt'$$

Ora possiamo svolgere uno dei due integrali, per esempio quello rispetto a t'. Come si può facilmente verificare, per ogni valore di t nell'intervallo $[-T,T]$, la delta di Dirac cade nell'intervallo di integrazione $[-T,T]$ rispetto a t', quindi:

$$Var(\bar{y}) = \frac{N_0}{2}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-T}^{T}\delta(t'-t)\left(1-\frac{|t'|}{T}\right)dt'\right)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt = \frac{N_0}{2}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t'|}{T}\bigg|_{t'=t}\right)\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt = \frac{N_0}{2}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)^2 dt$$

Notate che dopo l'eliminazione di uno dei due integrali, diventa lecito indicare i due triangoli rispetto alla sola variabile d'integrazione "sopravvissuta" t, perché $t'=t$ è proprio l'unico punto per il quale la delta di Dirac ha valore non nullo.

Ora basta risolvere il semplice integrale ottenuto (oppure notare che corrisponde banalmente all'energia di un triangolo di ampiezza opportuna…):

$$Var(\bar{y}) = \frac{N_0}{2}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t|}{T}\right)^2 dt = \frac{N_0}{2}2\int_{0}^{T}\left(1-\frac{t}{T}\right)^2 dt = \frac{N_0}{2}\frac{2}{T^2}\int_{0}^{T}(t-T)^2 dt = \frac{N_0}{2}\frac{2}{T^2}\frac{(t-T)^3}{3}\bigg|_{t=0}^{T} =$$

$$= 0-\frac{N_0}{2}\frac{2}{T^2}\frac{(-T)^3}{3} = \frac{N_0}{2}\frac{2}{3}T = \frac{N_0 T}{3}$$

SOLUZIONE 2

Potremmo considerare l'intero processo $y(t)=x(t)*h(t)$, dove

$$h(t) = \left(1-\frac{|t|}{T}\right)u(t+T)u(T-t) = \begin{cases} 1-\frac{|t|}{T} & -T \le t \le T \\ 0 & altrove \end{cases}$$

è un sistema LTI. Ci si rende poi conto facilmente che la variabile $\bar{y}$ è pari al processo $y(t)$, valutato in $t=0$. Infatti:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')h(t-t')dt'$$

$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')h(-t')d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\left(1-\frac{|-t'|}{T}\right)u(-t'+T)u(T+t')d\tau = \int_{-T}^{T} x(t')\left(1-\frac{|t'|}{T}\right)dt' = \bar{y}$$

Sfruttando la teoria possiamo affermare che $y(t)$ avrà autocorrelazione $R_y(\tau)=R_x(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$. In particolare, siamo interessati alla sola potenza del processo $y(t)$ e non a tutta la sua autocorrelazione, quindi ci basterà calcolare $R_y(0)$. Essendo il processo stazionario, quanto detto sarà vero per ogni istante di tempo t, e quindi anche per $t=0$ (l'istante significativo per $\bar{y}$). Procediamo col calcolo:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = \frac{N_0}{2} h(\tau) * h(-\tau) = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t')h(-(\tau - t'))dt'$$

$$R_y(0) = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t')h(-(0 - t'))dt' = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t')h(t')dt' = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 - \frac{|t'|}{T}\right)^2 (u(-t' + T)u(T + t'))^2 dt' =$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_{-T}^{+T}\left(1 - \frac{|t'|}{T}\right)^2 dt' = \frac{N_0 T}{3}$$

…dove in sostanza si giunge alla risoluzione del medesimo integrale incontrato nella prima versione delle soluzioni.