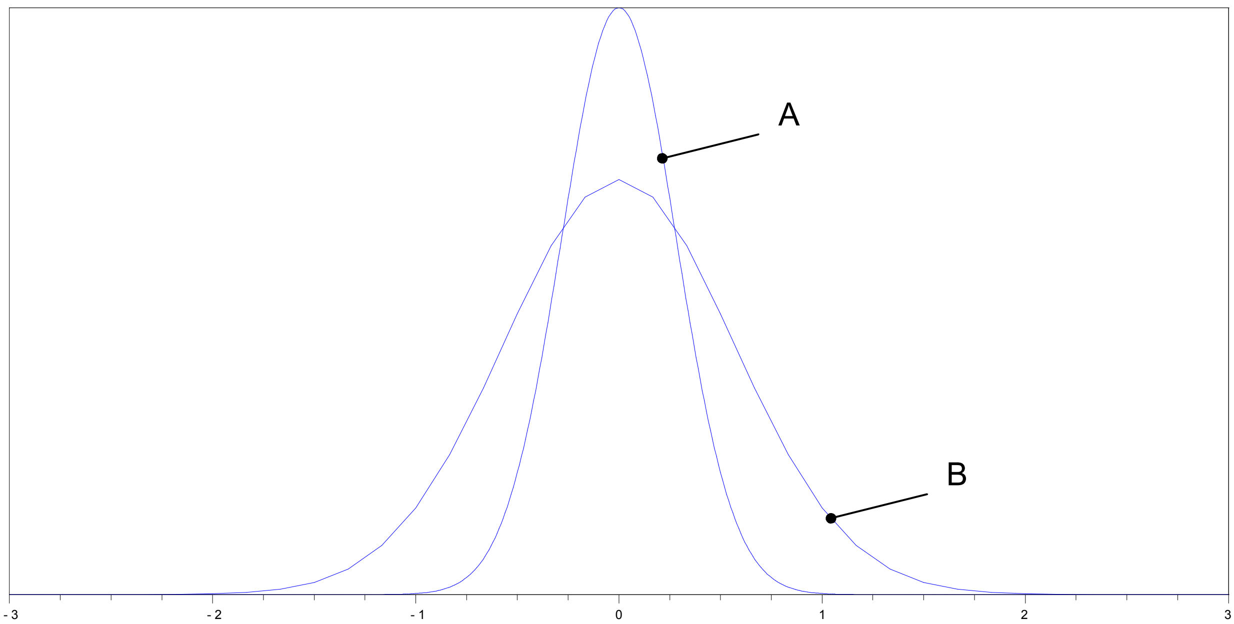
Cognome e Nome:	Matricola:	Firma:

Laboratorio di Fondamenti di Segnali e Trasmissione - 5/05/09
SOLUZIONI

Definire in SCILAB il segnale gaussiano **x1** (ed il relativo asse dei tempi **tx1**): $x_1(t) = e^{-2\pi t^2}$ Considerare l'intervallo temporale tra -3 e 3 secondi, a passi di 10 ms.	**dt=0.01;** **T=3;** **tx1=-T:dt:T;** **x1=exp(-2*%pi*tx1.^2);**

Calcolare la trasformata di **x1** in SCILAB e il relativo vettore delle frequenze (non sono richieste le istruzioni per disegnare il risultato).	**idx=find(tx1==0);** **N=length(tx1);** **x1_shift=[x1(idx:N) x1(1:idx-1)];** **X1_shift=fft(x1_shift)*dt;** **X1=fftshift(X1_shift);** **f=[-(N-1)/2:(N-1)/2]/N/dt;**

Eseguendo le operazioni sopra richieste, si ottengono i seguenti 2 grafici (volutamente sovrapposti…):



Quale si riferisce al dominio dei tempi e quale a quello delle frequenze? Perché? Quanto deve valere la trasformata in $f = 0$? NON scrivete le risposte sul disegno lasciando adito a fraintendimenti, scrivete nello spazio sottostante, basta indicare le curve come "curva A" o "curva B"…

La risposta più apprezzata avrebbe dovuto far notare che essendo $x_1(t)=e^{-\pi\left(\sqrt{2}t\right)^2}$ una versione "contratta" di $e^{-\pi t^2}$ (infatti $\sqrt{2}>1$) la trasformata deve essere "dilatata" e scalata del medesimo fattore (ricordatevi la proprietà della scalatura temporale…). Questo risponde anche alla seconda domanda: $X_1(0)=\left.\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\pi\left(\frac{f}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\vert_{f=0}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.71<1$. Anche il valore in $f=0$ quindi ci conferma che la curva B si riferisce alla trasformata di **x1***, mentre la curva A al segnale nel dominio dei tempi.* *Comunque è stata considerata corretta anche la risposta di chi ha notato il campionamento un po' grezzo di B, di sicuro maggiore dei 10ms richiesti.*

Avendo a disposizione altra memoria nel calcolatore, quale parametro aumentereste, il passo di campionamento oppure l'intervallo sul quale **x1** è rappresentato? Perché?
Deve essere di sicuro aumentato l'intervallo temporale di **x1***. Il passo di campionamento, infatti, è senza alcun dubbio sufficiente, visto che la trasformata oltre ai 2Hz è praticamente nulla e noi stiamo già campionando a 100Hz… Diverso il discorso per la risoluzione della trasformata. Come accennato precedentemente, nella trasformata si notano dei punti angolosi: vale di sicuro la pena di aumentare l'intervallo sul quale rappresentare* **x1***, campionando quindi in modo più fitto la sua trasformata.*

Scrivere il codice necessario per calcolare la banda B_{x_1} del segnale **x1** (ovvero la massima frequenza positiva per la quale $X_1(f)$ è maggiore in modulo di 1/10 del suo valore massimo*). * tale banda è detta banda a -20dB.	*Segnalo un errore commesso da più alunni: non si possono scrivere istruzioni del tipo:* **B=max(find(abs(X1)==max(abs(X1))/10))** *o affini, per due motivi. Prima di tutto,* **find** *restituisce un vettore con gli indici delle posizioni nelle quali è verificata la condizione, non direttamente le frequenze alle quali ciò accade! Seconda ragione, più sottile, è che essendo* **X1** *una versione campionata della trasformata, nulla ci garantisce che contenga proprio il campione di ampiezza $\sqrt{2}/20$. Tipicamente, alcuni saranno maggiori di tale valore, altri minori.* *Quindi potremmo ricercare la frequenza corrispondente al minimo dei campioni maggiori di $\sqrt{2}/20$, oppure al massimo di quelli che non eccedono tale valore, oppure la frequenza del campione che dista meno dal valore desiderato $\arg\min_{f\geq 0}\left\vert X_1(f)-\max_{f'}\left(X_1(f')\right)\right\vert$. Scriviamo in SCILAB, ad esempio, il codice per la seconda delle tre soluzioni, quella più conservativa:* **idx=find((f>=0)&abs(X1)<=(max(abs(X1))/10));** **Bx1=min(f(idx));**

Definire ora <u>a partire da **x1**</u> il segnale **x2** (ed il relativo asse dei tempi **tx2**): $x_2(t) = x_1(t-1) \cdot i$ dove i, l'unità immaginaria, in SCILAB è una costante e quindi si indica con **%i**, (proprio come π si indica con **%pi**).	*Errore sorprendente commesso da più alunni: considerare $x_1(t-1)$ come il prodotto di x_1 e $(t-1)$, quindi "alla SCILAB"* **x1.*(t-1)**. *A questo punto mi domando come mai nessuno abbia confuso nello stesso modo l'argomento di $x_2(t)$ col prodotto* **x2.*t**, *portando poi* **t** *al denominatore dell'espressione di destra… In futuro prestate più attenzione! Tra l'altro il codice SCILAB è sempre stato riportato in grassetto...* *Detto questo, più soluzioni sono state accettate. La più semplice è il banale assegnamento:* **x2=x1*%i;** **tx2=tx1+1;** *Alcuni hanno sviluppato il quadrato nell'esponente di $x_2(t)$, per giungere alla seguente espressione:* **tx2=tx1;** **x2=%i*x1.*exp(-2*%pi*(1-2*tx2));** *…con lo svantaggio però di non aver centrato la finestra temporale in corrispondenza del picco di $x_2(t)$.* *Chi ha moltiplicato in SCILAB* **X1** *per un esponenziale complesso, per poi antitrasformare il segnale, forse ha preso il problema un po' troppo alla larga…*

Scrivere il codice SCILAB per calcolare l'energia del segnale $x_2(t)$. Se avessimo calcolato l'energia di $x_1(t)$, vi sareste aspettati un risultato uguale o diverso?	**E2=sum(abs(x2).^2)*dt;** *Grave errore ricorrente: la definizione più generale di energia è $\int \lvert x(t) \rvert^2 dt$, dove il modulo può essere trascurato solo in caso di segnali reali! L'energia di un segnale è SEMPRE reale e positiva, al più nulla.*

Eseguendo il calcolo precedentemente richiesto si ottiene $B_{x_1} \approx 1.2$ Hz. Il ritardo introdotto in $x_2(t)$ ne modifica la banda rispetto a $x_1(t)$? E la moltiplicazione per i? Se sì, in entrambi i casi dire se la banda aumenta o diminuisce e perché. Dire con quale frequenza campionereste $x_2(t)$ per non incorrere in alias.

Il ritardo corrisponde in frequenza alla moltiplicazione per un esponenziale complesso, di modulo unitario e fase variabile. Segue che il modulo nel segnale corrispondente non varia, e non varia nemmeno se moltiplichiamo il segnale per i *:*
$\left|X_2(f)\right| = \left|X_1(f)e^{-j2\pi f}i\right| = \left|X_1(f)\right|\left|e^{-j2\pi f}\right|\left|i\right| = \left|X_1(f)\right|$. *Se il modulo non cambia, allora di sicuro non cambia nemmeno la banda! Essendo la banda uguale a quella di* $x_1(t)$*, il teorema del campionamento impone una frequenza di campionamento almeno doppia, cioè 2.4Hz. Essendo però il calcolo di* B_{x_1} *approssimato, pare ragionevole prendere un valore un po' maggiore, per esempio 4Hz.*

Calcolare in SCILAB: $y(t) = x_2(t) * x_2(t)$ ed il relativo asse dei tempi **ty**. La componente immaginaria della trasformata sarà nulla oppure no? $y(t)$ è ancora gaussiano? Giustificare entrambe le risposte.	**y=convol(x2,x2)*dt;** **ty=tx2(1)+tx2(1)+[0:length(y)-1]*dt;** *Si può facilmente dimostrare che* $y(t)$ *è reale. Infatti:* $y(t) = x_2(t) * x_2(t) = \left(x_1(t-1)i\right) * \left(x_1(t-1)i\right) =$ $= i^2 x_1(t-1) * x_1(t-1) = -x_1(t-1) * x_1(t-1)$ *dove* $x_1(t)$ *è reale.* $y(t)$ *è anche gaussiano (ovviamente se non consideriamo il segno negativo…), perché la convoluzione di due gaussiane è ancora una gaussiana (provate per esercizio a dimostrarlo, scrivete la definizione della convoluzione e sviluppate i calcoli…).*

FACOLTATIVO: la banda di $x_1(t)$ si sarebbe potuta ottenere analiticamente?
Sì. Il massimo di $x_1(t)$ *si ottiene in* $f = 0$ *come si può facilmente ricavare non solo graficamente, ma anche analiticamente studiandone i punti stazionari. Si può quindi cercare* $\bar{f} \geq 0$ *tale che* $\left\|\frac{X_1(\bar{f})}{X_1(0)}\right\| = \frac{1}{10}$*:* $$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi\left(\frac{\bar{f}}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = e^{-\pi\left(\frac{\bar{f}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{10}$$ $$-\frac{\pi\bar{f}^2}{2} = \ln\frac{1}{10}$$ $$\bar{f} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\ln 10} \approx 1.2107$$