Corso di Fondamenti di Segnali e Trasmissione

Allievi Ingegneri Informatici - sede di Cremona

III appello – 23 febbraio 2005

Esercizio 1

Si consideri il filtro con risposta in frequenza:

$$H(f)=\frac{A}{2}\left(1+\cos(\pi fT)\right)rect\left(\frac{fT}{2}\right) \qquad (1)$$

a) Disegnare la risposta in frequenza *H*(*f*).
E' reale? E' pari?
E' una forma d'onda nota?

b) Qual è la caratteristica delle forme d'onda *f*(*t*) dette "di Nyquist"?
E la caratteristica delle loro trasformate di Fourier *F*(*f*)?
Cosa sono invece le forme d'onda *g*(*t*) a "radice di Nyquist"?

c) Calcolare la risposta all'impulso del filtro e disegnarne il grafico (approssimativamente).
E' reale? E' pari? E' causale?
Quanto vale la risposta all'impulso *h*(*t*) negli istanti t = *-T, -T/2, 0, T/2, T*?

d) Calcolare l'energia di *h*(*t*).

e) Si calcoli l'uscita del filtro quando si applica all'ingresso il segnale $x(t)=\left(\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)+\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)^2$

Esercizio 2

Si desidera trasmettere una sequenza di misure rilevate ogni 3 ms e quantizzate su 32768 livelli, utilizzando un canale in banda passante di banda B_c = 5 kHz, tramite modulazione d'ampiezza, in fase e quadratura, di forme d'onda *g*(*t*) del tipo

$$g(t) \overset{TDF}{\Leftrightarrow} G(f)=\sqrt{H(f)}$$

dove *H*(*f*) è quella dell'esercizio precedente (1).

a) Si determini il ritmo con cui occorre trasmettere i bit.

b) Compatibilmente con la forma d'onda scelta e con la banda disponibile, si scelga la più semplice modulazione adatta al caso, e si determini il valore del parametro *T* nell'espressione (1).

c) Supponendo che il ricevitore misuri un rapporto E_b/N_0 = 7 dB, con che probabilità P_b sbaglia la decisione sul singolo bit? Con che probabilità P_e si riceve dunque una misura sbagliata?

d) Si supponga ora di quantizzare le misure su 2048 livelli, allo scopo di poter trasmettere con lo stesso sistema appena progettato, <u>ogni singola misura</u> protetta da un opportuno codice BCH. Quale codice si potrebbe utilizzare? Supponendo che il ricevitore fornisca al decodificatore dei bit errati con probabilità P_b calcolata al punto **(c)**, qual è la probabilità d'errore P_e sulla singola misura all'uscita del decodificatore?

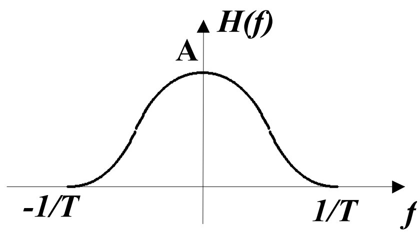
Parametri dei principali codici BCH

N	K	d	t
15	11	3	1
	7	5	2
	5	7	3
	1	15	7
31	26	3	1
	21	5	2
	16	7	3
	11	11	5
	...		

N	K	d	t
63	57	3	1
	51	5	2
	45	7	3
	39	9	4
	36	11	5
	...		
127	120	3	1
	113	5	2
	106	7	3
	99	9	4
	92	11	5

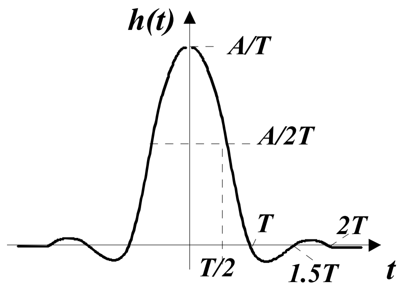
Soluzioni

Esercizio 1



a) Reale e pari, è la forma d'onda di Nyquist a coseno rialzato, cioè con roll-off pari a 1.

b) Sono forme d'onda a banda limitata che rispettano la condizione $f(kT)=0 \quad \forall k \neq 0$. Le $F(f)$ hanno transizioni simmetriche rispetto a 1/2T (come questa). Radici di Nyquist $g(t) \Leftrightarrow G(f)=\sqrt{F(f)}$.



c) $h(t)=\dfrac{A}{T}\operatorname{sinc}\left(\dfrac{t}{T/2}\right) * \left(\delta(t)+\dfrac{1}{2}\delta\left(t-\dfrac{T}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\delta\left(t+\dfrac{T}{2}\right)\right)=$

$=\dfrac{A}{T}\left(\operatorname{sinc}\left(\dfrac{t}{T/2}\right)+\dfrac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\dfrac{t-T/2}{T/2}\right)+\dfrac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\dfrac{t+T/2}{T/2}\right)\right)$

pari, reale, non causale, *h(t)= 0, A/2T, A/T, A/2T, 0.*

d) $E_h=\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2\, df=\dfrac{A^2}{2}\int_0^{1/T}(1+\cos(\pi f t))^2\, df=\dfrac{3A^2}{4T}$

e) $x(t)=1+\cos\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)+\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi t}{T}\right)+\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{4\pi t}{T}\right) \quad \Rightarrow$

$y(t)=H(0)+H\left(\dfrac{1}{2T}\right)\cos\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)=A+\dfrac{A}{2}\cos\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)$

Esercizio 2

a) Occorre inviare $\log_2(32768)$ bit ogni 3 ms, quindi R_b = 5 kb/s

b) Essendo $g(t)$ una radice di Nyquist con α=1, il segnale modulato occupa in banda passante una banda pari a

$$B=\frac{2R_b}{\log_2 M}=\left\langle \begin{array}{lll} M=4 & \rightarrow & 5\ kHz \\ M=16 & \rightarrow & 2.5\ kHz \\ \ldots & & \end{array}\right.$$

utilizzo una modulazione 4-QAM che invia 2 bit/simbolo e quindi T che è il tempo di simbolo, è pari a 0.4 ms.

c) $P_b=Q\left(\sqrt{\dfrac{2E_b}{N_0}}\right)_{\Big|E_b/N_0=7\ dB} \cong 10^{-3}, \quad P_e=1-\left(1-10^{-3}\right)^{15} \cong 15\cdot 10^{-3}=1.5\cdot 10^{-2}$

d) Con la riduzione dei livelli basterebbero $\log_2(2048)$=11 bit per ogni misura, per cui riutilizzando il sistema di prima che ne trasmette 15, possiamo permetterci di proteggere gli 11 bit d'informazione con un BCH(15,11,3) con potere correttore t=1. All'uscita del decodificatore si ha:

$$P_e=\sum_{i=2}^{15}\binom{15}{i}p^i(1-p)^{15-i} \cong \frac{15^2}{2!}p^2 \cong 10^{-4}$$, con $p=P_b$ calcolato precedentemente