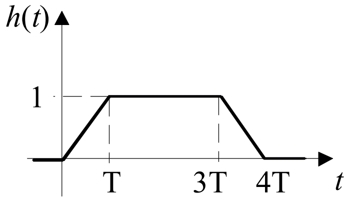
Corso di Fondamenti di Segnali e Trasmissione

Allievi Ingegneri Informatici - sede di Cremona

II prova scritta – 30 giugno 2004

Esercizio 1

Sia $h(t)$ la risposta all'impulso di un sistema lineare tempo-invariante, di forma trapezoidale rappresentata in figura.



a) Calcolare l'energia di $h(t)$.
b) Calcolare la risposta in frequenza $H(f)$ del filtro (suggerimento: si cerchi di scrivere $h(t)$ come differenza di segnali di trasformate note).
c) Si applichi all'ingresso del filtro il segnale $x(t) = 10\, sen(2\pi t / T) - \cos(\pi t / T)$: si determini l'uscita $y(t)$ e la sua potenza P_y.
d) Si applichi ora all'ingresso del filtro <u>solo</u> un processo casuale $n(t)$ gaussiano bianco, a valor medio nullo con densità spettrale di potenza $S_N(f) = N_0/2$: che cos'è l'uscita $y(t)$? Qual'è la sua potenza P_y? Quale la sua densità spettrale di potenza $S_y(f)$?

Esercizio 2

E' dato un segnale musicale analogico v(t) da campionare e convertire in formato numerico CD-audio (stereo, f_c=44.1 *kHz*, N_Q=16 bit/campione). Si vuole trasmettere la sequenza di bit così ottenuta, con un sistema di modulazione d'ampiezza in banda base a 8 livelli (8-PAM) con mapping di Gray, modulando in ampiezza segnali $g(t)$ di forma:

$$g(t) = A \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

dove $1/T$ è il ritmo con cui occorre inviare simboli sul canale. Il canale di trasmissione introduce un'attenuazione di 10 dB.
a) Si determinino il bit-rate R_b ed il tempo di simbolo T. Si scriva l'espressione del segnale $s(t)$ trasmesso, per una generica sequenza di ampiezze a_k
b) Si disegni il segnale $g(t)$. Si scriva l'espressione e si disegni il segnale $s(t)$, quando la sequenza dei bit da inviare sul canale è 011010111001, (per chi è in difficoltà, un ordine che soddisfa il vincolo di Gray è 000,001,011,010,110,111,101,100).
c) Si determini la risposta all'impulso del filtro adattato a g, ed il ritardo t_0 necessario a rendere il filtro causale. Si disegni (qualitativamente) l'uscita $y(t)$ del filtro adattato, in assenza di rumore, quando si trasmette un solo simbolo $s(t)=g(t)$; esplicitare durata di y, istante di ampiezza massima e valore.
d) Si disegni $y(t)$ uscita del filtro adattato, quando il segnale $s(t)$ è quello del punto b), sempre in assenza di rumore. Si espliciti la sequenza delle letture di y negli istanti t_0+kT confrontandola con quella attesa.
e) Si determinino le potenze P_r e P_t che occorre ricevere e trasmettere, per garantire una probabilità d'errore sul bit di $2 \cdot 10^{-5}$, in presenza di rumore additivo gaussiano bianco, con densità spettrale di potenza $N_0/2=10^{-9}$ *W/Hz*.
f) Quale sarebbe la banda minima necessaria per questo sistema di trasmissione?
(Fac.) La banda minima si otterrebbe modulando in ampiezza impulsi $g(t)$ a seno cardinale. Qual'è invece la banda occupata dal segnale $s(t)$ che utilizza la $g(t)$ data? (Si assuma come banda di $G(f)$, il primo valore di frequenza nel quale si annulla).

Soluzioni

Esercizio 1

a) $E_h = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t)dt = 2\int_o^T h^2(t)dt + \int_T^{3T} h^2(t)dt = 2\int_0^T \left(\frac{t}{T}\right)^2 dt + 2T = \frac{8}{3}T$

b) La risposta in frequenza è la TDF della risposta all'impulso, che si può scrivere come differenza:

$$h(t) = 2\, tri\left(\frac{t-2T}{2T}\right) - tri\left(\frac{t-2T}{T}\right) \quad \Leftrightarrow \quad H(f) = 2\cdot 2T\cdot \mathrm{sinc}^2(2fT)\cdot e^{-j4\pi fT} - T\cdot \mathrm{sinc}^2(fT)\cdot e^{-j4\pi fT}$$

oppure come somma di tre triangoli:

$$h(t) = tri\left(\frac{t-T}{T}\right) + tri\left(\frac{t-2T}{T}\right) + tri\left(\frac{t-3T}{T}\right) \quad \Leftrightarrow \quad H(f) = T\cdot \mathrm{sinc}^2(fT)\cdot\left(e^{-j2\pi fT} + e^{-j4\pi fT} + e^{-j6\pi fT}\right)$$

c) In ogni caso: $H\left(\frac{1}{T}\right) = 0,\quad H\left(\frac{1}{2T}\right) = -\frac{4T}{\pi^2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{4T}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right),\quad P_y = \frac{8T^2}{\pi^4}$

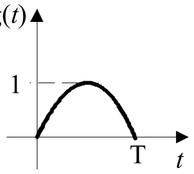
d) Anche y(t) è un processo casuale, gaussiano, a valor medio nullo, di potenza e densità spettrale:

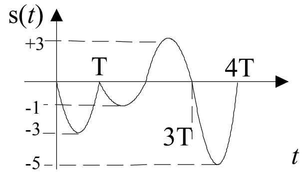
$$P_y = \frac{N_0}{2}E_h = \frac{4}{3}TN_0,\quad S_y(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}T^2\left|4\,\mathrm{sinc}^2(2fT) - \mathrm{sinc}^2(fT)\right|^2$$

Esercizio 2

a) $R_b = 2 \cdot 44.1 \cdot 10^3 \cdot 16$ bit/s = 1.41 Mb/s, $\quad T = \log_2 8/ R_b = 2.13\ \mu$s, $\quad s(t) = \sum_k a_k g(t-kT)$

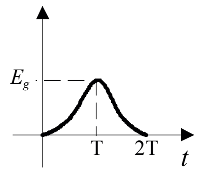
b) con il mapping suggerito, a_k=[-3 -1 3 -5], s(t)=-3g(t)-g(t-T)+3g(t-2T)-5g(t-3T)



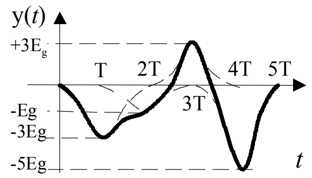


c) *h(t) = g(t₀-t) = g(T-t) = g(t)*, quindi $t_0=T$

y dura *2T*, ed il suo valore massimo si ha per *t=T* (piena sovrapposizione di *s* e *h*) e vale $y(T)=Eg=A^2T/2$.
(Si veda anche il compito di laboratorio)



d) posto *c(t)=g(t)*g(t),*
*y(t)= s(t)*g(t) =-3c(t)-c(t-T)+3c(t-2T)-5c(t-3T)*
Come previsto dalla teoria, in T,2T,3T,4T, *y* vale -Eg, -3Eg, 3Eg, -5Eg.



$E_s=21E_g=3E_b$

e) $P_b \cong \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right) = \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{6}{21}\frac{E_b}{N_0}}\right) = 2\cdot 10^{-5} \quad se \quad \sqrt{\frac{6}{21}\frac{E_b}{N_0}} = 4 \quad quindi \quad \frac{E_b}{N_0} = 56 = 17.5dB$

f) $P_r = E_bR_b = 56 \cdot 2 \cdot 10^{-9} \cdot 1.411\ 10^6$ = 157 mW = 22 dBm, $\quad P_t = P_r + \gamma$ = 32 dBm = 1.57 W

g) $B_{\min} = \frac{R_b}{2}\frac{1}{\log_2 8} = 235\ kHz$, mentre, per la parte facoltativa:

$$G(f) = j\frac{AT}{2}\left[\delta\left(f+\frac{1}{2T}\right) - \delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)\right] * \left(T\,\mathrm{sinc}(fT)e^{-j\pi fT}\right) = \frac{AT^2}{2}\left[\mathrm{sinc}\left(\left(f+\frac{1}{2T}\right)T\right) + \mathrm{sinc}\left(\left(f-\frac{1}{2T}\right)T\right)\right]e^{-j\pi fT}$$

che si annulla nel primo zero comune dei due seni cardinali, in 3/2T: $B=3/2T=R_b/2=700$kHz = $3B_{\min}$!!
(Si veda anche il compito di laboratorio)